

CONVERGENCIA SEMILOCAL DEL MÉTODO DE WHITTAKER APLICADO A LA ECUACIÓN DE KEPLER

José Miguel Gómez Guzmán

Asesor: Dr. Manuel Aurelio Diloné

Resumen

En este proyecto se estudia la convergencia semilocal del método de Whittaker, en el mismo se caracteriza la ecuación de Kepler, para así saber cuáles valores de la excentricidad (e) de dicho método tiene convergencia y determinar los intervalos de existencia y unicidad de solución para la mencionada ecuación.

Palabras claves: Ecuación de Kepler, Método de Whittaker, Convergencia Semilocal, Excentricidad, Intervalos de Existencia y Unicidad de Solución.

Abstract

In this project the semilocal convergence of the Whittaker method is studied, in it the Kepler equation is characterized, in order to know which values of the eccentricity (e) of said method has convergence and to determine the intervals of existence and uniqueness of solution for the aforementioned equation.

Keywords: Kepler's Equation, Whittaker's Method, Semilocal Convergence, Eccentricity, Intervals of Existence and Uniqueness of Solution.

Introducción

En este apartado se presenta el desarrollo histórico de la ecuación de Kepler tomado de Diloné M. (2013) [10] y Colwell P. (1993) [13] Así como el desarrollo histórico del método de Whittaker citando a Hernández M. (1993) [12] la verificación de los estudio con referencia a la convergencia semilocal, el planteamiento del problema de estudio, justificación de la investigación como los

objetivos que se persigue dicha investigación.

Desde la antigüedad el hombre ha presentado problemas para determinar la posición de los planetas en los firmamentos, ya sea por la controversia religiosa como también por la parte práctica. Actualmente, por el avance del Cálculo Infinitesimal y la Mecánica Celeste, para determinar la posición, ya sea de un planeta o satélite, o algún cuerpo que se encuentre sometido a la atracción gravitacional de otros y se hace necesario darle solución a la ecuación de Kepler:

$$M=E-e \sin E$$

Si ya conocemos los valores de M y e , entonces solo resta encontrar el valor de E . Los criterios que pertenecen a esta ecuación tienen una buena interpretación física.

Donde:

M es la anomalía media o lo que se conoce como el ángulo girado por un planeta cuyo movimiento es circular uniforme desde un punto conocido, por tanto, $\varepsilon[0, 2\pi]$

e es la excentricidad de la elipse, la cual describe el planeta bajo el intervalo $0 \leq e < 1$;

E es la anomalía excéntrica, es decir, el ángulo que le corresponde a la posición del planeta en los parámetros de una elipse.

Debido a que esta ecuación no posee un carácter lineal, se convirtió en una de las primeras que se intentó resolver de forma numérica. Si nos remontamos en el tiempo se puede decir que desde Newton este problema ha sido estudiado, ya sea por los matemático como por los astrónomos, ahora bien, dependiendo del contexto de que esta se resuelva tendríamos diferentes soluciones, pero para buscar el origen de la ecuación de Kepler debemos retomarnos a los tiempos fértiles; donde uno probablemente no podría elegir un tiempo más auspicioso para nacer, con tales dones astronómicos para haber vivido. Él nació veintiocho años después de la muerte de

Nicolaus Copernicus (1473-1543) y tuvo la oportunidad de conocer y trabajar con el astrónomo danés Tycho Brahe (1546-1601), quizás el observador más grande de la historia a simple vista. Era un contemporáneo de Galileo Galilei (1564-1642) y vivió para conocer la invención del telescopio y recibir informes de Galileo sobre lo que se veía a través de él: las cuatro lunas de Júpiter, por ejemplo. El propio Kepler tuvo la oportunidad de usar el telescopio, y estableció la fiabilidad y veracidad de las observaciones telescópicas a través de su estudio de los principios de cómo la luz pasa a través de las lentes (presentado en una obra llamada *Dioptrice*, 1611). Como resultado del trabajo empírico de Galileo y el trabajo teórico de Kepler, el advenimiento del telescopio anunció una nueva era en los tipos de observaciones que podrían hacerse de los cielos. Esta era fue testigo de grandes avances en astronomía.

Cuando Brahe se traslada a Praga toma a Kepler como su asistente, aunque ellos tenían punto de vista de manera científica diferentes. Una de ellas era que Kepler creía en el modelo de Copérnico, con el sol en el centro mientras que Brahe creía en que la Tierra era el centro del universo.

Al fallecer Brahe y quedando en el poder las tablas de observaciones de Marte, Kepler se lanza al reto de domar la órbita de este planeta, el m'as díscolo de todos, ya que era el que más se desviaba de su posición predicha.

Luego se da cuenta de que hay que rechazar la teoría de los movimientos circulares uniformes, después de probar con una órbita circular donde el Sol se encontraba en el punto ecuante. Kepler renuncia a la hipótesis de que la órbita tenía que ser circular cuando observó que la mayoría de posiciones de Marte encajaban perfectamente en la nueva órbita así definida, dos observaciones se separaban unos 8 grados de la posición teórica.

Luego tras probar con varias curvas, concluye que los planetas se movían en elipses. De esta manera, establece tres leyes empíricas, que se conocen como las tres leyes de Kepler las cuales se anuncian de la siguiente forma:

-Un planeta gira alrededor del Sol describiendo una \\'órbita

elíptica con el Sol ubicado en uno de los focos.

-La recta imaginaria que une al Sol con el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.

-El cuadrado del período orbital del planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita.

Una implicación inmediata de estas tres leyes, en particular la segunda, es que el planeta no se mueve con movimiento uniforme, desplazándose más rápido cuando se encuentra cerca del Sol que cuando se encuentra más alejado. Lo cual dificulta el cálculo de la posición del planeta en su órbita y para este caso Kepler dedujo lo que se denomina Ley Horaria del movimiento planetario, que trata de dar la posición del planeta en función del tiempo. Y es aquí donde tiene origen la ecuación de Kepler, ya que es preciso resolverla para poder determinar la posición de un planeta para un instante de tiempo dado.

Edmund Taylor Whittaker nació el 24 de octubre de 1873, el hijo mayor de John Whittaker y su esposa Selina, hija de Edmund Taylor, M.D. Obtuvo una beca de ingreso al Trinity College, Cambridge, en diciembre de 1891, y se colocó como segundo gobernador en los tripos matemáticos de 1895. Fue elegido miembro de Trinity en octubre de 1896, se incorporó al equipo y recibió el Primer Premio de Smith en 1897.

En 1906 Whittaker fue nombrado profesor de astronomía en la Universidad de Dublín, con el título de Astrónomo Real de Irlanda. En la primavera de 1912 fue elegido para la cátedra de matemáticas en la Universidad de Edimburgo.

Un pequeño grupo de documentos debe su existencia al hecho de que Edimburgo es uno de los principales centros de seguros de vida. Whittaker formó amistades con muchos de los actuarios comprometidos en ella, quienes le contaron varios problemas matemáticos que habían surgido en su experiencia, principalmente relacionados con la interpolación, el ajuste de curvas y la probabilidad. Al interesarse en la teoría de la interpolación, intentó responder algunas de sus preguntas fundamentales. Si los valores de una función analítica $f(x)$ que

de valores equidistantes de su argumento es decir $[a, a+w, a-w, a+2w, a-2w, a+3w, \dots]$

Son conocidos, entonces podemos escribir una "tabla de diferencias" para la función. Se puede decir que todas las funciones analíticas que dan lugar a la misma tabla de diferencias son cotabulares; cualquier dos funciones cotabulares son iguales entre sí cuando el argumento tiene cualquiera de los valores, $a, a+w, a-w, \dots$ pero en general no son iguales entre sí cuando el argumento tiene un valor no incluido en este conjunto.

En la teoría de la interpolación se introducen ciertas expansiones para representar la función $f(x)$, para valores generales de x , en términos de las cantidades que ocurren en la tabla de diferencias: por ejemplo, la fórmula de Newton-Gauss

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{w} \Delta f(a) + \frac{(x-a)(x-a-w)}{2!w^2} \Delta^2 f(a) \dots$$

Verificando en los siguientes estudios realizados en cuanto a lo que es la convergencia semilocal de métodos iterativos aplicados a ecuaciones se ha encontrado que:

Diloné M. estableció la caracterización de la teoría de convergencia semilocal para ciertos valores de la excentricidad, en los cuales se garantiza la convergencia del método de Newton-Raphson, así obtuvo resultados sobre su existencia y unicidad, los cuales comprobó bajo las condiciones de Cauchy-Kantorovich. También verificó las condiciones fuerte de Kantorovich en donde obtuvo su rango de excentricidad, por encima de la α -teoría de Wangzhong y Smale

Argyros, I.K., Cho y otros. Proporcionan nuevos resultados de convergencia semilocal para el método Halley con el fin de aproximar una solución local única de una ecuación no lineal en espacio de Banach. Muestra condiciones de convergencia suficiente que pueden ser más débiles, mientras que los límites de error en las distancias involucradas son más finos. Su primer enfoque es utilizar el análisis de tipo Kantorovich. El segundo enfoque es utilizar su nueva idea de funciones recurrentes. Dando

comparación entre los dos enfoques. También proporciona un ejemplo numérico para validar los resultados teóricos.

Diloné M y otros consideraron un punto de partida del valor $E_0 = \pi$ en los teoremas de convergencia semilocal de Kantorovich, Gutiérrez, η -teoría de Smale y la η -teoría de Wang-Zhao, los cuales compararon las condiciones de convergencia obtenidas.

Metodología

Se Presenta a continuación y de manera detallada la metodología que se utilizó durante el desarrollo de esta investigación, las cuales son Perspectiva Metodológica, Organización del Trabajo y Tipos de Análisis.

Diseño de la Investigación

La presente investigación, según la búsqueda de la causa, fue un diseño del tipo analítica-exploratoria. Exploratoria, ya que al inicio se debe documental de un tema que ha sido poco estudiado anteriormente analítico porque se debe analizar el método de Whittaker y su convergencia en la ecuación de Kepler. Con relación al tiempo de estudio, el diseño fue transversal, ya que se desarrolló durante un tiempo definido y con relación a la búsqueda de la causa fue un diseño analítico.

Tipo de Investigación

De acuerdo a las características esta investigación, fue del tipo exploratoria-explicativa. Exploratoria, porque debe documentar de un tema que ha sido poco estudiado anteriormente. Explicativa, porque tiene el interés de explicar la convergencia semilocal del método de Whittaker aplicado a la ecuación de Kepler.

Método de la Investigación

Para esta investigación, se utilizó el método analítico-deductivo, ya que se propone analizar los teoremas de convergencia semilocal para así deducir la convergencia de la excentricidad en la ecuación de Kepler.

Organización del Trabajo

Para organizar este trabajo primero se trabaja en la lectura de documentos relacionados con el tema de investigación, con la finalidad de comprender los conocimientos existentes dentro de esta y así establecer los antecedentes y limitaciones del tema objeto de estudio.

Tipo de Análisis

Se aplica a los fundamentos del Análisis Matemático

Presentación de Resultados

En este apartado se presentan los resultados principales de convergencia semilocal de las Condiciones de Raluca aplicado a la ecuación de Kepler.

Resultado Principales Condiciones de Raluca

Teorema: (Condiciones de Raluca) [14]. Si $e \leq 0.5858$ entonces la ecuación de Kepler tiene solución y está localizada en el intervalo $[E_0 + \delta, E_0 - \delta]$ con $\delta = \frac{4e\phi}{2\phi^2 - 5e^2}$. Además el método

de Whittaker definido por $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2f'(x_n)} (2 - L_f(x_n))$

iniciando en $E_0 = M$ converge a dicha solución.

Vamos a considerar el teorema del método de Whittaker sobre la convergencia semilocal el cual se presentó en el capítulo Bajo esta condiciones vamos a determinar las raíces correspondiente que puedan garantizar la existencia de solución para la ecuación de Kepler en término de la excentricidad e , es decir que

$$f(E) = E - e \sin E - M$$

Como se puede observar la relación al teorema de Teowhi y sus condiciones podemos establecer que:
Para $E_0 = M$ se tiene que:

$$f(E) = E - e \sin E - M$$

$$f(E) = -e \sin E_0 \Rightarrow |f(E_0)| \leq |e \sin E_0| \leq e \quad (1)$$

$$f'(E) = 1 - e \cos E \Rightarrow |f'(E_0)| \leq 1 - e \quad (2)$$

$$f''(E) = e \sin E \Rightarrow |f''(E_0)| \leq e \quad (3)$$

Tomando en cuenta las condiciones de Whittaker y (1) (2) y (3) se comprueba que:

$$\left| \frac{1}{f'(E_0)} \right| \leq \frac{1}{1-e} \Rightarrow \eta = \frac{1}{1-e} \quad (4)$$

$$M_2 = \sup |e \sin E_0| = e \text{ Pues el } \sup |\sin E_0| = \pm 1 \quad (5)$$

Tomando en cuenta la condición d del teorema se demuestra que:

$$\left| \frac{e^2}{(1-e)^2} \right| \leq 2 \leftrightarrow e \leq 0.5858 \quad (6)$$

Por otro lado al sustituir f en g sigue que:

$$\left| \frac{2\eta\lambda |f(E_0)|}{\lambda |1-\lambda| |f(E_0)|} \right| \leq \delta \quad (7)$$

Al sustituir (4) y (7) en la condición de λ establecida en f se comprueba que

$$\frac{5e \left(\frac{1}{1-e}\right)^2}{2} = \frac{5e}{2(1-e)^2} \quad (8)$$

Ahora al sustituir (4), (1), (8) en (7)

$$\begin{aligned} \left| \frac{2\eta\lambda |f(E_0)|}{\lambda |1-\lambda| |f(E_0)|} \right| \leq \delta &\leftrightarrow 1 - \left[\frac{2 \left(\frac{1}{1-e}\right) e^2}{2 (1-e)^2} \right] e \\ &\frac{\left(\frac{2e}{1-e}\right)}{2[(1-e)^2] - 5e^2} \leq \delta = \frac{2e}{2(1-e)^2 - 5e^2} \leq \delta \\ &\frac{4e(1-e)}{2(1-e)^2 - 5e^2} \leq \delta \\ \phi = (1-e) &\rightarrow \frac{4e\phi}{2\phi^2 - 5e^2} \leq \delta \end{aligned}$$

Con $e \leq 0.5858$ La condición $e \leq 0.5858$ también nos garantiza dos cosas:

1. La ecuación de Kepler tiene solución: E^*

2. El método de Whittaker definido por 2.17, iniciando

en $E_0 = M$, converge

a E^*

Teorema. Si $e \leq 0.17612$ entonces la ecuación de Kepler tiene solución y está localizada en el intervalo $[E_0 + \delta, E_0 - \delta]$ con un $\delta = \frac{4\pi\phi}{2\phi^2 - 5\pi e}$. Además el método de Whittaker definido por 2.2 iniciando en $E_0 = \pi$ converge a dicha solución.

Demostración Para $E_0 = \pi$ sigue que:

$$f(E) = E - e \sin E - M$$

$$f(E) = E_0 - e \sin E_0 - M \Rightarrow \pi - M \leq \pi \quad (9)$$

$$f'(E) = 1 - e \cos E \Rightarrow 1 + e \quad (10)$$

$$f''(E) = e \sin E_0 = 0 \quad (11)$$

Tomando en cuenta las condiciones de Whittaker y (11)

$$\left| \frac{1}{f'(E_0)} \right| \leq \frac{1}{1+e} = \eta \quad (12)$$

$$L_f(x) \leq 0 \rightarrow L_f(x) \leq 0 \quad (13)$$

$$M_2 = \sup |e \sin E_0| = e \quad (14)$$

$$\lambda = \frac{5m_2 \eta^2}{2} = e \quad (15)$$

$$\lambda = \frac{5e \left(\frac{1}{1-e} \right)^2}{2} = \frac{5e}{2(1-e)^2} \quad (16)$$

$$\mu_0 = \lambda |f(x)| < 1 = \frac{5e}{2(1-e)^2} \pi < 1 \quad (17)$$

$$5\pi e < 2(1+e)^2 \quad (18)$$

De donde se obtiene que

$$e \leq 0.17612$$

Si sustituimos las expresiones (9), (12) y (17) en (7) se tiene que

$$1 - \frac{2 \left(\frac{1}{1-e} \right) \cdot \pi}{5e} \leq \delta$$

$$\frac{4\pi(1+e)}{2(1+e)^2 \cdot 5\pi} \leq \delta$$

Si $\phi = 1(1+e) \frac{4e\phi}{2\phi^2-5e} \leq$ con $e \leq 0.1761$

La condición $e \leq 0.1761$ también nos garantiza dos cosas:

La ecuación de Kepler tiene solución: E^*

El método de Whittaker definido por 2.17, iniciando en $E_0 = M$, converge a E^*

Conclusiones

De acuerdo a los objetivos específicos que fueron planteados en esta investigación se puede llegar a las siguientes conclusiones.

1. El teorema de Whittaker tiene convergencia en los casos de $E_0 = M$ y $E_0 = \pi$ para los cuales se obtiene que $e \leq 0.5858$ y $e \leq 0.1761$ respectivamente. Siendo el de mayor rango de solución el caso de $E_0 = M$.

2. Para el caso de los intervalos de existencias se obtuvieron los siguientes parámetros, que garantizan dichas soluciones para $E_0 = M$ y $E_0 = \pi$

Referencias

Argyros, I.K., Cho, Y.J. and Hilout, On the semilocal convergence of the Halley method using recurrent functions S. J. Appl. Math. Comput. (2011) 37: 221.

Bernardo Cascales, El teorema del Punto Fijo Universidad de MURCIA, La Manga, 2012

E. Kopal, Notice concerned with the calculation of roots of numerical equations, Monatsh. Math. 02 (2002) pp. 331-332.

Francisco Israel Chicharro López, Análisis dinámico y aplicaciones de métodos iterativos de resolución ecuaciones no lineales, Universitat Politècnica de Valencia, España mayo de 2017

G.S. Salehov and M. A. Mertvetsova, On the convergence of some iterative processes, *Izv. Kazansk. Phil. ANSSSR. Ser. Phiz-Matem. i Techn.* Vol. 5, (1954), 77-108.

J. Gerlach, Accelerated convergence in Newton's Method, *SIAM Review*, Vol. 36,(1994), 272-276.

J. M. Gutiérrez, El método de Newton en espacios de Banach, Tesis doctoral, Universidad de La Rioja. Logroño, España, 1995.

J. S. Frame, A variation of Newton's method. *American Mathematical Monthly*, vol. 51 (1944) 36-38.

Kollerstrom, N., Thomas Simpson and Newton method of approximation: An enduring myth. *The British Journal for the History of Science*, Vol. 25 No. 4 (1992), 347-354. doi:10.1017/S0007087400029150

Manuel Aurelio Diloné Alvarado, Métodos iterativos aplicado a la ecuación de Kepler, Universidad de la Rioja, Servicio de Publicaciones, (2013).

M. A. Diloné, J. M. Gutiérrez and E. Vera's, Semilocal Convergence Newton Method Applied to Kepler Equation: New Results, *British Journal of Mathematics & Computer Science* 21(3): 1-13, 2017.

M.A. Hernandez Verón, An acceleration procedure of the Whittaker method by means of convexity, *Univ. u Novom Sadu, Zb. Rad. Prirod.- Mat. Fak. Ser. Mat.*, 20 (1990), 1, 27-38.

P. Colwell: Solving Kepler's equation over three centuries, Willmann-Bell, EEUU, 1993.

S. Raluca: The semilocal convergence of the convex acceleration of

Whittaker's method, Scientific Studies and Research. Series Mathematics and Informatics. Vol. 22, (2012), 117-124.