

CONSIDERACIONES SOBRE LA LEY DE RECIPROCIDAD CUADRÁTICA

Víctor Manuel García Guzmán
Asesor: M.A. Julio Antonio Manzueta

Resumen

En esta investigación se presenta un análisis exhaustivo de 7 demostraciones de la Ley de Reciprocidad Cuadrática en el campo de la teoría de números, mediante la descripción de los conceptos claves, las proposiciones, corolarios, lemas y los teoremas que son convergentes y/o divergentes y a la vez se especifica la consecuencia que produce dicha ley.

Esta a su vez, está estructurada en cinco capítulos, dentro de los cuales se encuentran elementos tales como, los antecedentes relacionados a la línea de investigación, el planteamiento de la problemática, la justificación de dicho problema, al igual que el alcance y límites de la misma, esta posee un marco referencial, donde se ilustran los conceptos fundamentales para el desarrollo de la misma, luego de expresada la metodología de la investigación, se presentan los resultados obtenidos y por último se ilustran conclusiones que dan respuesta a los objetivos.

Posee una metodología, enmarcada en el método analítico, ya que se analizaron algunas demostraciones de la Ley de Reciprocidad Cuadrática, además se partió de aspectos generales, para alcanzar conclusiones particulares. En la misma se desarrolló un diseño no-experimental, debido a que no se manipularon variables.

Palabras Claves: Ley de reciprocidad cuadrática, lema de Gauss, números primos, símbolo Legendre.

Abstract

This research presents an exhaustive analysis of 7 demonstrations of the Quadratic Reciprocity Law in the field of number theory, through the description of key concepts, propositions, corollaries,

lemmas and theorems that are convergent and / or divergent and at the same time the consequence produced by said law is specified.

This, in turn, is structured in five chapters, within which are elements such as the antecedents related to the line of research, the approach to the problem, the justification of said problem, as well as the scope and limits of It has a referential framework, where the fundamental concepts for its development are illustrated, after the research methodology is expressed, the results obtained are presented and finally conclusions that respond to the objectives are illustrated.

It has a methodology, framed in the analytical method, since some demonstrations of the Law of Quadratic Reciprocity were analyzed, in addition it started from general aspects, to reach particular conclusions. In it, a non-experimental design was developed, since variables were not manipulated.

Keywords: Quadratic reciprocity law, Gaussian motto, prime numbers, Legendre symbol.

Introducción

En este capítulo se presenta un conjunto de investigaciones, que guardan estrecha relación con el tema de este estudio, las cuales funcionan como marco de referencia, para el desarrollo y eficacia de este proyecto. Las investigaciones en cuestión, constituyen los antecedentes históricos y académicos, refiriéndose a la Ley de Reciprocidad Cuadrática en el campo de la teoría de números.

Otros de los elementos que conforman este capítulo son: el planteamiento del problema, objetivos, justificación de la investigación y los alcances de la misma. Elementos que ilustran, lo que se quiere conseguir con este proyecto.

E. León Cardenal (2009), hace una breve revisión histórica de la ley de reciprocidad cuadrática mediante la reconstrucción histórica de los pasos que condujeron a la formulación y posterior demostración, también L. Castellanos Manzano (2012), presenta una revisión sobre reciprocidad

cuadrática, cúbica y bicuadrática, empleando la teoría desarrollada sobre los caracteres multiplicativos, las sumas de Gauss, y de igual forma A. Portillo, S. Patricia, S. Márquez y W. Antonio (2015), presentan el funcionamiento y la importancia de la ley de reciprocidad cuadrática en la teoría de números.

M. David Russinoff (1992), hace uso del probador de teoremas de Boyer-Moore para generar mecánicamente una prueba de la Ley de reciprocidad cuadrática, el cual concluyó especificando que al probar esta ley mediante el teorema de Boyer-Moore, la ley obtiene una visión práctica y novedosa debido a su estructuración y forma. Por otro lado, E. León cardinal (2005), compara dos demostraciones de la ley de reciprocidad cuadrática atendiendo a los autores de las demostraciones en la Universidad Nacional de Colombia (Bogotá), concluyendo que Gauss a través de las sumas cuadráticas fue más ilustre que Einstein aplicando las raíz primitivas, también, N. Buck M. A. (2010), se centra en demostrar la ley reciprocidad cuadrática por el símbolo de Jacobi (Reciprocidad cuadrática para los enteros racionales y los enteros gaussianos) concluyendo con una construcción del lema de Gauss.

M. Lazcano coca (2017), hace un estudio tomando seis demostraciones de una larga lista de demostraciones de la ley de reciprocidad cuadrática mediante conceptos y teoremas, el cual concluye diciendo que el estudio de la Ley de Reciprocidad Cuadrática es de suma interés, ya que partiendo de puntos muy distintos y de ramas muy distantes de las matemáticas, llegamos un resultado común, por otro lado, T. Zeballos, R. García (2017), presenta resultados importantes de la ley de reciprocidad cuadrática en los enteros gaussianos y mediante rutinas de aplicación del Software Wolfram Matemática 10, en donde concluye estableciendo que la ley de reciprocidad cuadrática es muy importante debido a su gran utilidad, y E. Sevillano Castellano. (2018), presenta la demostración de la ley de reciprocidad cuadrática utilizando distintas herramientas, concluyendo especificando que, aunque sean con diferentes herramientas se llega al mismo resultado.

Metodología

En esta investigación se desarrolla un diseño no-experimental. Con relación al tiempo de estudio, transversal debido a que se desarrolla durante un tiempo definido, y con relación a la búsqueda de la causa será un diseño analítico, ya que nos centraremos en un análisis exhaustivo de dichas demostraciones de la ley de reciprocidad cuadrática.

De acuerdo a las características esta investigación, es documental bibliográfico explicativa, porque se analizan documentos bibliográficos, consultas de tesis, libros y otro tipo de información escrita que se considere importante para realizar esta investigación. Explicativa, porque tiene el interés de explicar el análisis matemático sobre algunas de las demostraciones de la ley de reciprocidad cuadrática, tomando en cuenta la convergencia y/o divergencia y las consecuencias de dicha ley.

Se utiliza el método analítico-deductivo, por la razón de que se analizan diversas demostraciones de la ley de reciprocidad cuadrática, considerando las convergencias y divergencias de las mismas e identificar las consecuencias de dicha ley.

Organización del Trabajo.

En sentido general, el desarrollo de la investigación tiene tres etapas:

1ra: Se procede a la obtención de materiales bibliográficos (libros, artículos y revistas) y publicaciones electrónicas, haciendo una revisión, bajo la supervisión del asesor, para la depuración de las distintas fuentes de información obtenidas.

2da: Se desarrolla un borrador en el que se describe la estructura que indica cómo se abordara el contenido de la investigación.

3ra: Se continúa con el análisis de contenido y la selección de datos que se ajustan a los requerimientos del borrador elaborado en la etapa dos. Luego, se verifica la estructuración de los datos seleccionados de las distintas fuentes con los objetivos propuestos

al inicio de la investigación. Y finalmente se lleva a cabo encuentros con el asesor y expertos relacionados con el tema para el intercambio de ideas.

Análisis de los Resultados

La demostración 1, se basa en el símbolo de Jacobi donde se presenta su definición y propiedades llamadas así proposiciones que se sustentan del criterio de Euler para ser demostradas y estas se convierten en la base para entender la dicha demostración, seguido de esto se destacan los conceptos claves como son: Residuos de números, Congruencia Cuadrática, Primos Impares, Sumatoria y la Productoria. También se describen los lemas, corolarios y proposiciones.

En cuanto a La demostración 2, La idea de Gauss estaba basada en encontrar ciertos números de la forma $4n+1$ y $4n+3$, para así generalizar su teorema y para esto, se basó en probar 8 casos de congruencia cuadrática que son demostrados mediante inducción matemática. Cuando el número es de la forma $4n+1$ es 1 mód 4 y cuando es de la forma $4n+3$ es -1 mód 4, siendo n un número entero. En esta demostración se deben tomar en cuenta los siguientes conceptos: Números Primos Impares, Congruencia Modular, Residuos de Números y la Inducción Matemática, los cuales son la base fundamental para dicha demostración.

La demostración 3, Se basa en el Lema de Gauss el cual establece que $\left(\frac{n}{p}\right) = (-1)^k$ donde n representa un entero positivo, p un número primo impar y k el número o (total) de elementos de la sucesión perteneciente al conjunto denominado como $S = (n, 2n, 3n, \dots, \left(\frac{p-1}{2}n\right))$, mediante este lema se demuestra dos partes:

1ra: n es impar, p un primo talque $\text{mcd}(n, p) = 1$

$$p = \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{jn}{p} \right\rfloor \rightarrow \left(\frac{n}{p}\right) = (-1)^p$$

2da: si p y q son los primos impares distintos, entonces:

$$\frac{(p-1)(q-1)}{5} = \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \left| \frac{jn}{p} \right| + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left| \frac{kp}{k} \right|$$

Para entender esta demostración se deben dominar los siguientes.

Números primos impares, Congruencia Modular o Cuadrática, La Sumatoria, Factorial de un Número, Conjunto y Sub-conjunto y el mismo Teorema titulado como el Lema de Gauss.

La demostración 4 consiste en las sumas cuadráticas de Gauss, especificando así los conceptos principales, los lemas y proposiciones que son la base fundamental para esta demostración. Tales conceptos son Raíz primitiva de la unidad y las sumas cuadráticas de Gauss, Los lemas que sustentan esta demostración.

En cuanto a la demostración 5, esta se identifica por su relevancia con los conjuntos demostración. Para poder realizar esta demostración se deben de tomar en cuenta las notaciones necesarias, los conceptos claves y teorema.

Se toman como notaciones a $|S|$ como el cardinal de S , se define a $r_{\frac{p-1}{2}, \frac{p-1}{2}, yk}$ es denotado como el menor resto no negativo de la división de y entre k y por ultimo denotan a $r_p \left\{ 1, \dots, \frac{p-1}{2} \right\} r_p = \left\{ \frac{p-1}{2}, \dots, p-1 \right\}$

$$r_q = \left\{ 1, \dots, \frac{q-1}{2} \right\} r_q = \left\{ \frac{q-1}{2}, \dots, q-1 \right\}$$

Los conceptos claves para esta demostración: Números primos impares, Restos positivos, Conjuntos disjuntos, Cardinal de un conjunto y la Paridad entre números o conjuntos y el teorema que se debe tomar en cuenta es el Chino De Los Restos.

Demostración 6, esta demostración se basa en dos partes principales que comprenden el lema Gauss es decir, sea p un número primo impar y $a \in \mathbb{Z}$ el cual es un entero tal que $p \nmid a$, entonces se cumplen las dos condiciones para a , que son: $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^s$ para $a=1$ y siendo s el número de elementos cuyo resto de división por p es mayor que $\left(\frac{p}{2}\right)$ y la otra condición cuando $a \geq 3$ y es primo impar entonces $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^t$ donde

$$t = \sum_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{ai}{p}\right)$$

Esto es lo que establece Gauss.

En el mismo orden para llevar a cabo esta demostración tenemos que tomar en cuenta los siguientes conceptos que son: Números primos impares, Congruencia de números, Factorial de un número, Paridad entre números, Sumatoria, Cardinal de conjunto, Conjunto, Sub-conjunto y la Unión e Intersección de conjuntos. También cabe destacar el teorema (Criterio de Euler) y la proposición (Lema de Gauss).

También la demostración 7, esta demostración se basa en el lema de Gauss, especificando así la convergencia en ambas del lema de Gauss valga la redundancia y también el autor utiliza una representación o comprobamiento mediante el plano cartesiano (retícula), especificando los puntos de los triángulos que forman para determinar la Ley de Reciprocidad Cuadrática.

Para esclarecer esta demostración necesitamos dominar los siguientes conceptos: Números Primos impares, Residuo Cuadráticos, Sumatoria, Congruencia Cuadrática y Coordenadas enteras. Dichos conceptos son claves para esta demostración al igual que la proposición (Lema de Gauss).

Conclusiones

En esta tesis se analizaron 7 demostraciones de la Ley De Reciprocidad Cuadrática, en donde se comprobó que: dicha Ley solo se aplica para los número primos impares de la forma $4n+1$ y $4n+3$, los números primos impares, congruencia cuadrática, residualitas de números, paridad de número, sumatoria y produciría, inducción matemática, suma cuadrática de Gauss, cardinal de un conjunto, conjuntos disjuntos y coordenadas enteras son los conceptos claves para dichas demostraciones.

Anexos

Ley de Reciprocidad Cuadrática.

Teorema De La Ley De Reciprocidad Cuadrática:

Sean p y q primos impares distintos, entonces

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{q-1}{2}\right)}$$

Demostración:

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a, b) = 1$ y $b > 2$ impar. Si $b = p_1 p_2 \dots p_n$ donde los p_i son primos no necesariamente distintos y $a = z_1 z_2 \dots z_m$ donde los z_m también son primos no necesariamente distintos entonces:

Por la definición 2.7, z_2 es un residuo de $\dots$, o también $z_1 - z_2 = kb$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Es decir sea $z_1 \equiv z_2 \pmod{b} \Rightarrow z_1 \equiv z_2 \pmod{p_i}$ $\left(\frac{z_1}{b}\right) = \left(\frac{z_1}{p_1}\right) \left(\frac{z_1}{p_2}\right) \dots \left(\frac{z_1}{p_n}\right) = \left(\frac{z_1}{p_1}\right) \left(\frac{z_2}{p_2}\right) \dots \left(\frac{z_1}{p_n}\right) = \left(\frac{z_2}{b}\right)$ por lo tanto, $z_1 - z_2 \pmod{b} \Rightarrow \left(\frac{z_1}{b}\right) = \left(\frac{z_2}{b}\right)$ por la proposición 2.7 (a)

Sean $r, s \in \mathbb{Z} > 2$ impares se tiene que:

Dado que $a = z_1 z_2 \dots z_m$ entonteces

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{z_1 z_2}{b}\right) = \left(\frac{z_1 z_2}{p_1}\right) \left(\frac{z_1 z_2}{p_2}\right) \dots \left(\frac{z_1 z_2}{p_n}\right) = \left(\frac{z_1}{p_1}\right) \left(\frac{z_2}{p_2}\right) \dots \left(\frac{z_1}{p_n}\right) \left(\frac{z_2}{p_1}\right)$$

$$\left(\frac{z_1}{p_2}\right) \dots \left(\frac{z_1}{p_n}\right) \text{ Por lo cual:}$$

$$\left(\frac{z_1}{b}\right) \left(\frac{z_2}{b}\right) = \left(\frac{z_1 z_2}{b}\right) \text{ Por la proposición 2.7 (b)}$$

Por la definición 2.8, se tiene que $\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right) \left(\frac{a}{p_2}\right) \dots \left(\frac{a}{p_n}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right) \left(\frac{a}{p_2}\right)$

y dado que $b = p_1 p_2 \dots p_n \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{p_1 p_2}\right)$

por lo tanto: $\left(\frac{a}{p_1}\right) \left(\frac{a}{p_2}\right) = \left(\frac{a}{p_1 p_2}\right)$ por la proposición 2.7 (c)

Sean $r, s, \in \mathbb{Z} > 2$ impares se tiene que:

$(rs - 1) \equiv 0 \pmod{4}$ y $(r - 1) + (s - 1) \equiv 0 \pmod{4}$. Dado que r y s son números enteros impares mayores que 2 entonces $(rs - 1) - ((r - 1) + (s - 1)) \equiv 0 \pmod{4}$, lo que implica que $(rs - 1) \equiv (r - 1) + (s - 1) \pmod{4}$ y se tiene:

$$\left(\frac{rs-1}{2}\right) \equiv \left(\frac{r-1}{2}\right) + \left(\frac{s-1}{2}\right) \pmod{2}. \text{ Por el lema 2.2.1 (a)}$$

Puesto que $(rs - 1) \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow (r^2 s^2 - 1) \equiv 0 \pmod{16}$ y dado que $(r - 1) + (s - 1) \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow (r^2 - 1) + (s^2 - 1) \equiv 0 \pmod{16}$,

Por lo que $(r^2 s^2 - 1) \equiv (r^2 - 1) + (s^2 - 1) \pmod{16}$.

Entonces: $\left(\frac{r^2 s^2 - 1}{8}\right) \equiv \left(\frac{r^2 - 1}{8}\right) + \left(\frac{s^2 - 1}{8}\right) \pmod{2}$ por el lema 2.2.1 (b)

Dado que

$$\sum_{i=1}^n (r_i - 1) = (r_1 - 1) + (r_2 - 1) + \dots + (r_n - 1),$$

$$\Rightarrow r_1 r_2 \dots r_n - 1 \equiv (r_1 - 1) + (r_2 - 1) + \dots + (r_n - 1)$$

Sea $A = r_1 r_2 \dots r_n - 1$, y $B = (r_1 - 1) + (r_2 - 1) + \dots + (r_n - 1)$, $\Rightarrow A \equiv B \pmod{2}$. lo que implica que B es un residuo de $A \pmod{2}$ y por la proposición 2.5), $(r_1 - 1) + (r_2 - 1) + \dots + (r_n - 1)$ es un residuo de $r_1 r_2 \dots r_n - 1 \pmod{2}$.

Entonces por el corolario 2.11 a.) se obtiene que:

$$\left(\frac{r_1 r_2 \dots r_n - 1}{2}\right) \equiv \sum_{i=1}^n \left(\frac{r_i - 1}{2}\right) \pmod{2}.$$

Puesto que

$$\sum_{i=1}^n (r_i - 1) = (r_1^2 - 1) + (r_2^2 - 1) + (r_n^2 - 1), \text{ y}$$

$$(r_1^2, r_2^2, \dots, r_n^2 - 1) \equiv (r_1^2 - 1) + (r_2^2 - 1) + \dots + (r_n^2 - 1) \pmod{2},$$

Y sean $f = (r_1^2, r_2^2, \dots, r_n^2 - 1)$ y $g = (r_1^2 - 1) + (r_2^2 - 1) + \dots + (r_n^2 - 1) \pmod{2}$, entonces:

$f \equiv g \pmod{2}$. Por la afirmación 2.2, esto implica que g es un residuo cuadrático de $f \pmod{2}$.

Dado que $r > 2$ impar se tiene. $\left(\frac{r_1^2 - 1}{8}\right), \left(\frac{r_2^2 - 1}{8}\right), \dots, \left(\frac{r_n^2 - 1}{8}\right)$ son divisiones exacta mod 8 y también

$$\left(\frac{r_1^2 - 1}{8}\right) \left(\frac{r_2^2 - 1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{r_n^2 - 1}{8}\right).$$

Entonces $\left(\frac{r_1^2 - 1}{8}\right) \left(\frac{r_2^2 - 1}{8}\right) \left(\frac{r_3^2 - 1}{8}\right) - \left(\frac{r_1^2 - 1}{8}\right) + \left(\frac{r_2^2 - 1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{r_n^2 - 1}{8}\right)$

$0 \pmod{2}$, por el corolario 2.11 b.) se tiene que

$$\left(\frac{r_1^2 r_2^2 \dots r_n^2 - 1}{2}\right) \equiv \sum_{i=1}^n \left(\frac{r_i^2 - 1}{2}\right) \pmod{2}.$$

Como $a = z_1, z_2, \dots, z_m$ y $b = p_1, p_2, \dots, p_n$

$$\Rightarrow \left(\frac{-1}{b}\right) \left(\frac{-1}{p_1}\right) \left(\frac{-1}{p_2}\right) \dots \left(\frac{-1}{p_n}\right) = (-1) \left(\frac{p_1 - 1}{2}\right) (-1) \left(\frac{p_2 - 1}{2}\right) \dots (-1) \left(\frac{p_n - 1}{2}\right) = (-1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_i - 1}{2}\right)$$

Por el corolario 2.11 a.)

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{p_i - 1}{2}\right) = \frac{p_1 p_2 \dots p_n - 1}{2} \equiv \frac{b - 1}{2} \pmod{2}.$$

Y por tanto $\left(\frac{-1}{b}\right) = (-1) \left(\frac{b-1}{2}\right)$ por la proposición 2.8 a.)

$$\left(\frac{2}{b}\right) \left(\frac{2}{p_1}\right) \left(\frac{2}{p_2}\right) \dots \left(\frac{2}{p_n}\right) = (-1) \left(\frac{p_1 - 1}{8}\right) (-1) \left(\frac{p_2 - 1}{8}\right) \dots (-1) \left(\frac{p_n - 1}{8}\right) = (-1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_i - 1}{8}\right),$$

Por el corolario 2.11 b.) se tiene,

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{p_i^2 - 1}{8}\right) = \frac{p_1^2 p_2^2 \dots p_n^2 - 1}{2} \equiv \frac{b^2 - 1}{8} \pmod{2}.$$

Entonces $\left(\frac{2}{b}\right) = (-1) \left(\frac{b^2 - 1}{8}\right)$ por la proposición 2.8 b.)

Entonces $\left(\frac{2}{b}\right) = (-1) \left(\frac{b^2 - 1}{8}\right)$ por la proposición 2.8 b.)

$$\left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{b}{a}\right) = \left(\left(\frac{z_1}{p_1}\right) \left(\frac{z_2}{p_2}\right) \dots \left(\frac{z_m}{p_m}\right)\right) \left(\left(\frac{p_1}{z_1}\right) \left(\frac{p_2}{p_2}\right) \dots \left(\frac{p_n}{z_n}\right)\right)$$

$$\left(\prod_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m} \left(\frac{z_i}{p_j}\right)\right) \left(\prod_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m} \left(\frac{p_j}{p_i}\right)\right)$$

$$\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n \left(\frac{z_i}{p_j} \right) \left(\frac{p_j}{z_i} \right)$$

Desarrollando

$$\prod_{i=1}^m \left(\frac{z_i}{p_i} \right) = \left(\frac{z_1}{p_1} \right) \left(\frac{z_2}{p_2} \right) \dots \left(\frac{z_m}{p_m} \right) = (-1) \left(\frac{p_1-1}{2} \right) (-1) \left(\frac{p_2-1}{2} \right) \dots (-1) \left(\frac{p_m-1}{2} \right)$$

Por lo tanto

$$\left(\frac{a}{b} \right) \left(\frac{b}{a} \right) = (-1)^{\sum_{i=1}^l \sum_{i=1}^l \left(\frac{z_i-1}{2} \right) \left(\frac{p_i-1}{2} \right)}$$

Aplicando de nuevo el corolario 2.11 se tiene

$$\sum_{j=1} \sum_{i=1} \left(\frac{z_i-1}{2} \right) \left(\frac{p_i-1}{2} \right) \equiv \left(\frac{a-1}{2} \right) \left(\frac{b-1}{2} \right) \pmod{2}.$$

Finalmente

$$\left(\frac{a}{b} \right) \left(\frac{b}{a} \right) = (-1)^{\left(\frac{a-1}{2} \right) \left(\frac{b-1}{2} \right)} \text{ Por la proposición 2.8}$$

Referencias

Buck, N. (2010). Quadratic reciprocity for the rational integers and the Gaussian integers, The University of North Carolina at Greensboro.

Castellanos Manzano L. (2009). Sobre la Reciprocidad Cuadrática, Cúbica y Bicuadrática, incluyendo algunas de sus aplicaciones. Instituto Politécnico Nacional Escuela Superior de Física y Matematica. (México, D. F.).

León Cardenal, E. (2009). La Gema de la Reina: Una breve revisión histórica de la Ley de Reciprocidad Cuadrática, Universidad Nacional de Colombia Lecturas Matemáticas, 30, 17-27.

Lazcano Coca, M. (2017). La Ley de Reciprocidad Cuadrática: Algunas Pruebas clásica, Editorial Labor, Universidad de Cantabria.

Portillo, A. Patricia, S. Márquez S. y Antonio W. (2015). La Ley de Reciprocidad Cuadrática. tesis, Universidad de El Salvador.

Russinoff, D. M. (1992). Una prueba mecánica de la Ley de Reciprocidad Cuadrática. *Diario de razonamiento automatizado*, 8 (1), 3-21.

Sevillano Castellano, E. (2018). Cuatro Demostraciones de la Ley de Reciprocidad Cuadrática. (Universidad de Sevilla España).

Zeballos, T. y García, R. (2017). Ley de Reciprocidad Cuadrática en los enteros gaussianos. *Visión Antataura*, 1(1), 74-94.

Beshenov A. (2018). Una prueba de la Ley de Reciprocidad Cuadrática mediante la revisión de materiales necesarios. Universidad de el Salvador.

Jara P. y Torrecillas B. (2018). Realiza la Demostración de la Ley de Reciprocidad Cuadrática y sus aplicaciones a la aritmética de números enteros. *Estalmat Andalucía Oriental*.