

LAS MATRICES DE PAULI PARA DETERMINAR EL SPIN DE UNA PARTÍCULA DESDE LA PERSPECTIVA DE LA TEORÍA DE GRUPOS.

Lenny Bueno Guzmán

Asesor: M.A. Julio Antonio Manzueta

Resumen

Se realizó un estudio de investigación, la misma posee como objetivo fundamental, las Matrices de Pauli para determinar el Spín de una Partícula desde la perspectiva de la Teoría de Grupos. Esta a su vez, está estructurada en cinco capítulos, dentro de los cuales se encuentran elementos tales como, los antecedentes relacionados a la línea de investigación, el planteamiento de la problemática, la justificación de dicho problema, al igual que el alcance y límites de la misma, esta posee un marco referencial, donde se ilustran los conceptos fundamentales para el desarrollo de la misma, luego de expresada la metodología de la investigación, se presentan los resultados obtenidos y por último se ilustran conclusiones que dan respuesta a los objetivos.

Posee una metodología, enmarcada en el método analítico, ya que se analizaron las Matrices de Pauli y la Teoría de Grupos, además se partió de aspectos generales, para alcanzar conclusiones particulares. En la misma se desarrolló un diseño no experimental, debido a que no se manipularon variables, además exploratoria porque el tema ha sido poco estudiado. En el desarrollo de este documento se ponen en evidencia algunos elementos interesantes, dentro de los cuales se pueden destacar; las matrices de Pauli para determinar el comportamiento de una partícula, los operadores vectoriales, uso de operadores Hermitiano, las características de estos operadores desde la perspectiva de la Teoría de Grupos, los teoremas, las propiedades y proposiciones de las mismas.

Palabras Claves: Matrices de Pauli, Spin de una partícula, operadores vectoriales, matrices unitarias, teoría de grupos, grupo de dimensión 2.

Abstract

A research study was carried out, it has as its fundamental objective, the Pauli Matrices to determine the Spin of a Particle from the perspective of Group Theory. This, in turn, is structured in five chapters, within which are elements such as the antecedents related to the line of research, the approach to the problem, the justification of said problem, as well as the scope and limits of It has a referential framework, where the fundamental concepts for its development are illustrated, after the research methodology is expressed, the results obtained are presented and finally conclusions that respond to the objectives are illustrated. It has a methodology, framed in the analytical method, since the Pauli Matrices and the Group Theory were analyzed, in addition, it started from general aspects, to reach particular conclusions. In it, a non-experimental design was developed, because variables were not manipulated, and also exploratory because the subject has been little studied. In the development of this document some interesting elements are highlighted, among which we can highlight; the Pauli matrices to determine the behavior of a particle, the vector operators, the use of Hermitian operators, the characteristics of these operators from the perspective of Group Theory, the theorems, their properties and propositions.

Keywords: Pauli matrices, Spin of a particle, vector operators, unit matrices, group theory, $SO(2)$ group of dimension 2.

Introducción

En esta primera parte se presenta un conjunto de investigaciones, que guardan estrecha relación con el tema de este estudio, las cuales funcionan como marco de referencia, para el desarrollo y eficacia de este proyecto. Las investigaciones en cuestión, constituyen los antecedentes históricos y académicos, refiriéndose a las matrices de Wolfgang Pauli de orden 2×2 y la Teoría de Grupos.

Otros de los elementos que conforman este capítulo son: el

planteamiento del problema, objetivos, justificación de la investigación y los alcances de la misma. Elementos que ilustran, lo que se quiere conseguir con este proyecto.

De acuerdo a Zettili (2009), Wolfgang Pauli, Heisenberg, Jordan, Sommerfeld, etc. en el (1926), dieron introducción del spin resuelve con todas las dificultades conocidas hasta el entonces, por lo tanto este nuevo atributo del electrón se aceptó, junto a los ya conocidos de carga y masa. En efecto, se encontró que la aparición de dobletes en el espectro de los metales alcalinos se debe exclusivamente a la interacción entre el momento magnético orbital y el momento magnético intrínseco del electrón de valencia.

En el 1928, Dirac desarrolló una teoría relativista del electrón, en la que no es preciso postular el spin sino que éste aparece en forma natural como una consecuencia de la invariancia Lorentz de las ecuaciones que lo describen. La ecuación de Dirac también predice correctamente el valor del factor giro magnético. Estos resultados muestran que el spin está íntimamente relacionado con la relatividad. Con la teoría de Dirac el spin adquirió una firme base teórica.

Según Sánchez (1996), los orígenes de las Matrices de Pauli, surgen con la idea de Goudsmit y Uhlenbeck, estos llegaron a la conclusión que para describir a los electrones del átomo, además de los números cuánticos, se requería de un cuarto concepto, el llamado Spín del electrón. Éste, al girar sobre su propio eje genera un campo magnético, el denominado Spín.

Según Mora (2003), los orígenes de la Teoría de Grupos se remontan al siglo XVIII, con las ideas de Evaristo Galois, quien inició el estudio de la teoría de ecuaciones polinómicas fundamentales para el álgebra abstracta acerca de la solubilidad algebraicas con radicales de $a_n x_n + a_{n-1}x_{n-1} \dots + a_1x + a_0 = 0$

En 1771, L. Lagrange demostró que el orden de un grupo finito se relaciona con el orden de cualquiera de sus subgrupos. Más tarde comprobó que se cumple para grupos abelianos y cíclicos, aunque su reciprocidad no ha sido posible.

En 1776, L. Euler, desarrolló el teorema de la rotación en un espacio tridimensional. Haciendo la combinación de rotaciones otra rotación, donde el conjunto de las operaciones tiene una estructura algebraica conocida como grupo especial ortogonal de un espacio de dimensión tridimensional.

Monte (2019), establece que unos de los aspectos esenciales en la Teoría de Grupos son los grupos continuos. En 1870, el matemático noruego Marius Sophus Lie, introdujo por primera vez el grupo Lie, con el estudio de simetrías de ecuaciones diferenciales.

Barrera (2003), presenta generalidades de las demostraciones de grupos de permutación, grupos de Lie, grupos de rotación y generadores infinitesimales del álgebra de grupos. En la misma lista los conceptos básicos y fundamentales para el estudio de la Teoría de Grupos.

El interés por el estudio de la Teoría de Grupos se extendió a muchos otros científicos, como: Carl Friedrich Gauss, Joseph-Louis Lagrange, Niels Henrik Abel, etc., aunque fue en 1830 cuando Evaristo Galois publica su primera obra, donde resuelve las ecuaciones de quinto grado usando raíces $n^{\text{ésima}}$ mediante métodos de radicales. La demostración permitió conocer el grupo abeliano y la función abeliana.

Rivas (2005), presenta los elementos de la Teoría de Grupos para estudiantes de física, desarrollando demostraciones de grupos de rotación, abeliano, finitos, tensores, simetrías de espinores y las invariantes de un grupo de Lie.

Zaldívar (2006), presenta la descripción de simetría, grupos cíclicos, permutaciones y las matrices, para la demostración de los teoremas de Sylow y Lagrange.

Paul (1996), estableció un modelo combinatorio para ciertas estructuras en topología algebraica y teoría formal de grupo, representado por la constante de Planck en los cuerpos negros, los postulados y el modelo atómico de Bohr, la teoría de Albert

Einstein y el principio de exclusión de Wolfgang Pauli.

Aquino, Plessis y Montiel (2009), establecen una introducción a la Teoría de Grupos con aplicaciones en la teoría matemática de la música, donde explican los aspectos básicos de las sucesiones exactas, grupos abelianos generados, grupos libres, transformaciones paralelas y transformaciones relativas (T_p y T_r).

Martínez (2009), presenta una demostración de las Matrices de Pauli en álgebra matricial, donde se le aplica una rotación a una matriz cuyos elementos son números imaginarios o complejos. A dichas matrices se les agrega una rotación del momento angular intrínseco del Spín, constituyendo una base vectorial del álgebra de Lie del grupo especial unitario SU (2), actuando sobre la representación de dimensión 2.

Isaksen (2012), hace una descripción del cubo de rubik y la Teoría de Grupos, explicando cómo se puede resolver este cubo a través de permutaciones, los grupos de las orientaciones de las esquinas, los codos laterales, el centro y los subgrupos de elementos que sólo cambian de orientaciones.

Irene (2013), establece que la Teoría de Grupos puede resolver juegos, haciendo uso de algoritmos de permutaciones, notaciones cíclicas, grupos y subgrupos, simetría y los sólidos platónicos, además demuestra que la Teoría de Grupos es aplicable a los juegos; volteo de las campanas, Puzzles, Piraminx y presenta algunas estrategias para resolver el cubo de rubik de orden 2x2, 3x3 y 4x4.

Pietrashen (2015), expone la Teoría de Grupos con aplicación a la Mecánica Cuántica, desarrollando los fundamentos representativos de grupos, el análisis de la simetría de la función de onda de Schrödinger, degeneración de un campo de coulomb y la mecánica no relativista.

Las Matrices de Pauli son de gran utilidad en la Mecánica Cuántica, consideradas como las más poderosas e influyentes aplicaciones en el mundo actual, quizás la más extraordinaria. Matemáticamente,

las Matrices de Pauli constituyen una base vectorial del álgebra de Lie del grupo especial unitario $SU(2)$, actuando sobre la representación de dimensión 2.

Las Matrices de Pauli tienen una representación lineal, cumplen con las reglas de conmutación del álgebra de Lie $SU(2)$, usadas específicamente en Física Cuántica en la rotación de partículas elementales, representadas en unas matrices que introducen elementos imaginarios y complejos.

Es necesario destacar, que en el campo de las matemáticas y la Mecánica Cuántica, una de las situaciones más estudiadas, son las Matrices de Pauli de orden 2×2 , un método muy famoso utilizado por los físicos para resolver el movimiento de una partícula en el campo real y el complejo, el cual logra usar valores de forma muy precisos que permiten emplear operadores vectoriales y matriciales convirtiéndolos en matrices con elementos entre 0, 1 y números complejos. Esto ha permitido un análisis profundo de las definiciones, teoremas, lemas, proposiciones y propiedades que sustentan los fundamentos óptimos de la Mecánica Cuántica.

De acuerdo a lo mencionado anteriormente, muchos físicos han creado diversas teorías acerca de la rotación del Spín de una partícula para estudiar su comportamiento y su momento angular, cabe destacar que una de esas teorías, es la Teoría de Grupos que ha permitido establecer avances significativos a la física con la estructura de sistemas simétricos y la clasificación de los objetos con simetría que cumplen ciertos axiomas para formar La Teoría de Grupos es muy famosa y está íntimamente relacionada con la simetría de objetos, en la actualidad con la transformación de grupo con rotación lineal, el cual logra presentar las características de un grupo y cómo representar su momento angular orbital.

Metodología

En la elaboración de esta investigación, se seleccionó un diseño no experimental, según Hernández (2014), se define como la investigación que se realiza sin manipular deliberadamente variables.

Para el estudio de la misma se escogió un enfoque cualitativo, debido a que su desarrollo está basado en descripciones, explicaciones y análisis de los conceptos, proposiciones y demostraciones.

De acuerdo a las características de esta investigación, es de tipo exploratoria, ya que está basada en una temática poco estudiada y proporciona una referencia general y específica de la misma. Además, es de tipo descriptiva-explicativa dado a que se describieron y explicaron las Matrices de Pauli de orden 2×2 y la Teoría de Grupos.

Para esta investigación se utiliza el método analítico, pues como lo expresan los objetivos investigativos y las conclusiones obtenidas, la misma consiste en un análisis de las Matrices de Pauli, el comportamiento del Spín de una partícula y su incidencia desde la perspectiva en la Teoría de Grupos. Además, se utiliza el método deductivo, porque se procede de aspectos generales de las Matrices de Pauli y la Teoría de Grupos, para llegar a conclusiones particulares de las mismas.

Análisis de los Resultados

Determinar el comportamiento de una partícula, mediante las Matrices de Pauli.

El comportamiento del Spín de una partícula en sus estados cuánticos es igual al vector spinors generalmente usados para medir las componentes σ_x , σ_y y σ_z . Esto significa que para determinar el movimiento intrínseco del electrón se debe conocer la probabilidad hacia donde se dirige dicha partícula.

En las propiedades de las Matrices de Pauli, se verifica que el cuadrado de los operadores vectoriales en cada una de las componentes σ_x , σ_y y σ_z arriban a una matriz identidad, también se verifica que cuando se toma $K>1$, los resultados de los productos de las matrices resultan las mismas matrices unitarias. Por otra parte, cuando dos operadores distintos $\sigma_x, \sigma_y + \sigma_y \sigma_x, \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_y, \sigma_x \sigma_z + \sigma_z \sigma_x$ conmutan resulta una matriz nula.

La aplicación de los tensores de Kronecker y Levi-Civita, permiten verificar una fórmula general de los operadores vectoriales en x, y, z siempre que estos sean distintos y diferentes de cero.

Caracterizar el Spín de una partícula en la Teoría de Grupos

El análisis de la Teoría de Grupos, mediante el uso de operadores lineales, permite verificar que una matriz R evaluada en un ángulo de $-\pi < \theta \leq \pi$ es igual a la unidad, pero cuando θ es mayor que 180° es igual a cero, además los grupos abeliano e isomorfo son los más relacionados con las rotaciones con dicho estudio, permitiendo representar matrices reales y complejas en un grupo $SO(2)$ de dimensión 2.

Conclusiones

Los análisis de los resultados obtenidos en esta investigación, permiten llegar a las siguientes conclusiones:

1. El Spín ($\frac{1}{2}$) de la partícula del electrón, sólo puede dirigirse a dos direcciones, hacia arriba cuando el valor (+) y hacia abajo (-).

2. La propiedad 1 de las Matrices de Pauli de orden 2×2 determina que cuando se utiliza un $K > 1$ devuelve la misma matriz identidad de dimensión 2. En la propiedad 2, la relación de conmutación de dos Matrices de Pauli, es igual a cero.

3. Los tensores de Kronecker y Levi-Civita, son unas herramientas vectoriales de gran utilidad para generalizar operadores desiguales de las Matrices de Pauli.

4. El producto de dos matrices con rotación en el plano $SO(2)$ dentro de un intervalo $-\pi < \theta \leq \pi$, es igual a 1, además el producto de ambas matrices es conmutativo.

Anexos

Matrices de Wolfgang Pauli con Spin $\frac{1}{2}$

Proposición: Una partícula con spín $\frac{1}{2}$, tiene un electrón en estado de α y β igual $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ medir las componentes de σ_x σ_y + σ_z y determinar la probabilidad hacia dónde se dirige el spin de la partícula del electrón.

Demostración de la proposición

La representación vectorial de los estados de la partícula es

$$|p, m_p\rangle$$

$p = \frac{1}{2}$ es el spin del electrón

$$m_p = -p, -p+1, \dots, p-1, p.$$

$m_p = \pm \frac{1}{2}$ es el número cuántico.

$$m_p = \pm \frac{1}{2} \begin{cases} m_p = \frac{1}{2} \\ m_p = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$|p, m_p\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \text{ Partícula hacia arriba}$$

$$|p, m_p\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \text{ Partícula hacia abajo}$$

Se mide el Spin en cada una de las componentes $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$

Para σ_x se obtienen los autovalores y autovectores, tomando un vector $x_{\pm} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ asociado a $\lambda = \pm \frac{1}{2} \hbar$.

$$\begin{aligned} \sigma_x x_{\pm} &= \sigma_x \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2} \hbar \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ \text{Como } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &\text{ es una matriz identidad} \\ &= \pm \frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donde $\pm \frac{1}{2} \hbar$ son los autovalores y $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ autovectores

Por las definiciones de autovalor y autovector

$$= \pm \frac{1}{2} \hbar.$$

$$x_{\pm} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Se escribe α y β en términos de una combinación lineal de autovectores en la componente σ_x

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Los coeficientes de a y b se expresan en términos de α y β , mediante un sistema de ecuaciones

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha + \frac{1}{\sqrt{2}} b$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha - \frac{1}{\sqrt{2}} b$$

Sumando la [2] y [3]

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha + \frac{1}{\sqrt{2}} b$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha - \frac{1}{\sqrt{2}} b$$

$$\alpha + \beta = \frac{2}{\sqrt{2}} \alpha$$

$$\alpha + \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha$$

Se despeja a α en [4]

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha + \beta)$$

En [3] se multiplica por (-1) , luego se suman [2] y [3]

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha + \frac{1}{\sqrt{2}} b$$

$$\beta = \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{\sqrt{2}} b$$

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha + \frac{1}{\sqrt{2}} b \\ -\beta &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \alpha + \frac{1}{\sqrt{2}} b \\ \hline \alpha - \beta &= \frac{2}{\sqrt{2}} b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Racionalizando } \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

$$\alpha = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) (\alpha + \beta)$$

$$\alpha = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) (\alpha - \beta)$$

Sustituir α y β por sus respectivos valores en [5] y [6]

$$\alpha = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \right) = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\alpha = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \right) = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

La suma e los módulos cuadrados de a y b es 1

$$|\alpha|^2 = \left| \frac{3}{\sqrt{10}} \right|^2 = \frac{9}{10}$$

$$|b|^2 = \left| \frac{-1}{\sqrt{10}} \right|^2 = \frac{1}{10}$$

$$|\alpha|^2 + |b|^2 = \frac{9}{10} + \frac{1}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

Notar que la normalización de α y b es igual a 1, la cual indica que la partícula sólo tomará una dirección, hacia arriba o hacia abajo. En este caso hacia arriba, ya que los resultados de los módulos determinan que b .

Para σ_y se obtienen los autovalores y autovectores, tomando un un vector $y_{\pm} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ asociado a $\lambda = \frac{1}{2} \hbar$.

$$\sigma_y \lambda_{\pm} = |\varphi_y \lambda| \cdot y_{\pm}$$

Como $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz identidad

$$= \pm \left(\frac{1}{2} \hbar\right) \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \pm \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Donde $\frac{1}{2} \hbar$, son los autovalores y $\begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \pm \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Por las definiciones de autovalor y autovector

$$\lambda = \pm \frac{1}{2} \hbar.$$

$$y = \pm \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \pm \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \mathbf{i}$$

Se escribe α y β en términos de una combinación lineal de autovectores en la componente σ_y

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \\ \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \\ \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right]$$

$$\alpha = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} c + \frac{\hbar}{\sqrt{2}} d(i)$$

$$\beta = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} c - \frac{\hbar}{\sqrt{2}} d(i)$$

Sumando la [8] y [9]

$$\alpha = \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2}} c \right) i + \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2}} d \right) i$$

$$\beta = \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2}} c \right) i - \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2}} d \right) i$$

Se despeja a c en [10]

$$c = i \left(\frac{2\hbar}{\sqrt{2}} \right) \alpha + \beta$$

En [9] se multiplica por (-1), luego se suma [8] y [9]

$$\alpha = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} i.c + \frac{\hbar}{\sqrt{2}} i.d$$

$$\beta = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} i.c - \frac{\hbar}{\sqrt{2}} i.d \quad (-1)$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} i.c + \frac{1}{\sqrt{2}} i.d$$

$$-\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} i.c + \frac{1}{\sqrt{2}} i.d$$

$$\alpha - \beta = \frac{2\hbar}{\sqrt{2}} i.d$$

Racionalizando $\frac{2}{\sqrt{2}}$

$$c = i \cdot \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2}} \right) (\alpha + \beta)$$

$$d = i \cdot \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2}} \right) (\alpha - \beta)$$

Sustituir α y β por sus respectivos valores en [11] y [12]

$$c = i \cdot \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \right] = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \right) = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$d = i \cdot \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \right] = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right) = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$|c|^2 = \left| \frac{3}{\sqrt{10}} \right|^2 = \frac{9}{10}$$

$$|d|^2 = \left| \frac{-1}{\sqrt{10}} \right|^2 = \frac{1}{10}$$

$$|c|^2 + |d|^2 = \frac{9}{10} + \frac{1}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

Se observa que la normalización de c y d es igual a 1, la cual indica que la partícula solo tomara una dirección, hacia arriba o hacia abajo. En este caso hacia arriba, ya que los resultados de los módulos determinan que c es mayor que d.

Para σ_z se obtienen los autovalores y autovectores, tomando un vector $z_{\pm} \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

asociado a $\lambda = \frac{i}{2} \hbar$

$$\begin{aligned} \sigma_z z_{\pm} &= \sigma_z z_{\pm} \lambda_{\pm} z \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \hbar \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \pm \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es una matriz identidad

$$= \pm \frac{1}{2} \hbar \cdot \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \pm \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Donde $\frac{1}{2} \hbar$ son los autovalores y $\begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \pm \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ autovectores

Por las definiciones de autovalor y autovector

$$\lambda = \pm \frac{i}{2} \hbar$$

$$z_{\pm} = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \pm \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Se escribe α y β en terminos de una combinacion lineal de autovectores en la componente

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \left[r \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right]$$

Los coeficientes de r y s se expresan en términos de α y β , mediante un sistema de ecuaciones

$$\alpha = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} r + \frac{\hbar}{\sqrt{2}} s \quad [14]$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} r - \frac{1}{\sqrt{2}} s \quad [15]$$

Sumando la [14] y [15]

$$\alpha = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) r + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) s$$

$$\beta = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) r - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) s$$

$$\alpha + \beta = \frac{2}{\sqrt{2}} r$$

$$\alpha + \beta = \frac{2}{\sqrt{2}} r \quad [16]$$

Se despeja r en [16]

$$r = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) (\alpha + \beta)$$

En [14] se multiplica por (-1) , luego se suman [14] y [15]

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} r + \frac{1}{\sqrt{2}} s$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} r - \frac{1}{\sqrt{2}} s$$

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}} r + \frac{1}{\sqrt{2}} s \\
 -\beta &= -\frac{1}{\sqrt{2}} r - \frac{1}{\sqrt{2}} s \\
 \hline
 \alpha - \beta &= \frac{1}{\sqrt{2}} s \\
 \text{Racionalizando } \frac{2}{\sqrt{2}} & \\
 \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{2}{\sqrt{2}} &= \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 r &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) (\alpha + \beta) \quad [17] \\
 s &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) (\alpha - \beta) \quad [18]
 \end{aligned}$$

Sustituir a y b por sus respectivos valores en [17] y [18]

$$\begin{aligned}
 r &= \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right) = \frac{3}{\sqrt{10}} \right] \\
 s &= \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{10}} \right]
 \end{aligned}$$

La suma de los módulos cuadrados de r y s es 1

$$\begin{aligned}
 |r|^2 &= \left| \frac{3}{\sqrt{10}} \right|^2 = \frac{9}{10} \\
 |s|^2 &= \left| \frac{-1}{\sqrt{10}} \right|^2 = \frac{1}{10} \\
 |r|^2 + |s|^2 &= \frac{9}{10} + \frac{1}{10} = \frac{10}{10} = 1
 \end{aligned}$$

Notar que la normalización de r y s es igual a 1, la cual indica que la partícula sólo tomará una dirección, hacia arriba o hacia abajo. En este caso hacia arriba, ya que los resultados de los módulos determinan que r es mayor que s .

Matrices de Wolfgang Pauli y sus propiedades.

Por definición σ_x , σ_y , σ_z son las matrices de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Estas matrices cumplen las siguientes propiedades:

i. $\sigma_j^2 = (j=x, y, z)$

ii. $\sigma_j \sigma_k + \sigma_k \sigma_j = 0 \quad (j \neq k)$

Los subíndices j y k se refieren a x, y, z y $\hat{I}$ es la matriz unitaria de orden 2×2

Se observa que [19] se cumple para $(j=x, y, z)$

Primera propiedad de las Matrices de Pauli

$$\text{Para } \sigma_x^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & 0+0 \\ 0+0 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Para } \sigma_y^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+(-i.i) & 0+0 \\ 0+0 & 0+(-i.i) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1-(-1) & 0 \\ 0 & -(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verificar [19] cuando se tiene un exponente $k > 1$, donde $k \in \mathbb{N}$

$$k = \{2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Para $k = 2$ en $j = x$

$$(\sigma_x^2)^2 = \sigma_x^4 = (\sigma_x^2)(\sigma_x^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I}$$

Para $k = 3$ en $j = x$

$$(\sigma_x^2)^3 = \sigma_x^6 = (\sigma_x^4)(\sigma_x^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I}$$

Para $k = 4$ en $j = x$

$$(\sigma_x^2)^4 = \sigma_x^8 = (\sigma_x^4)(\sigma_x^4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I}$$

Para $k = 2$ en $j = y$

$$(\sigma_x^2)^2 = \sigma_y^4 = (\sigma_x^2)(\sigma_x^2) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I}$$

Para $k = 3$ en $j = y$

$$(\sigma_y^2)^3 = \sigma_y^6 = (\sigma_y^4)(\sigma_y^2) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I}$$

Para $k = 4$ en $j = y$

$$(\sigma_x^2)^4 = \sigma_y^8 = (\sigma_y^4)(\sigma_y^4) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I}$$

Para $k = 2$ en $j = z$

$$(\sigma_z^2)^2 = \sigma_z^4 = (\sigma_z^2)(\sigma_z^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I}$$

Para $k = 3$ en $j = z$

$$(\sigma_z^2)^3 = \sigma_z^6 = (\sigma_z^4)(\sigma_z^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I}$$

Para $k = 4$ en $j = z$

$$(\sigma_z^2)^3 = \sigma_z^6 = (\sigma_z^4)(\sigma_z^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I}$$

La primera propiedad de las Matrices de Pauli en las componentes x , y , z . genera siempre la matriz unitaria I , sin embargo cuando se verifica en un exponente $k > 1$, donde $k \in N$, se comprueba que también conlleva a los mismos resultados.

Segunda propiedad de las Matrices de Pauli

De acuerdo a [20] se verifica las siguientes relaciones de conmutación:

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+i & 0+0 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0+i & 0+0 \\ 0+0 & i+0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+i & 0+0 \\ 0+0 & -i+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para $\sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_y = 0$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0 & 0+i \\ i+0 & 0+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0+0 & 0+0 \\ 0-i & 0+0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & i & 0+0 \\ 0+0 & -i+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Por ultimo se verifica la relacion $\sigma_x \sigma_z + \sigma_z \sigma_x$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0 & 0-1 \\ 1+0 & 0+0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0+0 & 1+0 \\ 0-1 & 0+0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0 & 1+1 \\ 1-1 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Se observa que siempre que conmutan dos Matrices de Pauli, ambas distintas se obtiene la Matriz Nula.

Referencias

Aquino O. (2009), Introducción a la Teoría de Grupos con Aplicaciones en la Teoría Matemática de la Música. Publicaciones Electrónica Sociedad Matemática Mexicana. México.

Barrera F. (2003), Introducción a la Teoría de Grupos. México.

Cobelli P. (2017), Apunte Teórico de Tensores. Estructura de Materia 1.

Erdmann K. y Wildon M. (2006), Introduction to Lie Algebras, 1era Edición, Springer-Verlag Londres, Estados Unidos de América.

Ferrer R. (2001), Mecánica Cuántica I, Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile.

Gastinel N. (1975), Análisis Numérico Lineal. España

Gratton J. (2003), Introducción a la Mecánica Cuántica

Gonzales F. (2016), The Phenomenon of Half-Integer Spín, Quaternions, and Pauli Matrices

Hemmer C. & Olaussen K. (2011), Det Kongelige Norske Videnskabers Selskabs Skrifter. Trondheim. Poner Bibliografía de Kronig

Irene C. (2013), Juegos y Teoría de Grupos. Universidad Autónoma de Puebla. México.

Isaksen C. (2012), Rubik's Cube and Group Theory. Faculty of Mathematics and Natural Science University of Oslo. Noruega.

Jesús H. (2009), Curso de Química Cuántica I. Facultad de Química (UNAM). México

Jerónimo G. (2008), Álgebra Lineal. Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Buenos

Aires

Judson T. (2017), Algebra Abstracta. Teoría y Aplicaciones. Universidad de Chile.

Lagrange, J. (1817), Nouveaux Mémoires de L'académie Royale Des Sciences et Belles Lettres de Bruxelles. Primera Edición. Bruselas.

López, R. (2004), Espacios Vectoriales. Departamento de Geometría y Topología Universidad de Granada. España.

Mariano L. (2013), Momento Angular. Su conservación. Junta Andalucía. España

Martínez A. (2009), Mecánica Cuántica. Rotaciones de las Matrices de Pauli. México

Martínez P. (2017) Teoría de Grupos, Estructura de Grupos Finitos. Departamento de Álgebra. Universidad de Granada.

Martín R. (2005), Elementos de Teoría de Grupos para Estudiantes de Física. Leioa. (España).

Monte C. (2019), Física Matemática. Grupo de Lie, Rotaciones, Unitarios, Poincaré. Universidad de Granada, España.

Noriega j. (2012), Cursos y Seminarios de Matemática, Departamento de matemática. Universidad de Buenos Aire. Argentina.

Páez C. (2013), Matrices y Sistemas Lineales. Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Miguel A. (2009). Sobre la Ortogonalidad y Algunas Consecuencias. Departamento de Matemática. México.

Paul C. (1996). Modelos Combinatorios para Ciertos en Topología Algebraica y Teoría Formal de Grupos. Departamento de

Matemática. Inglaterra.

Pietrashen M. (2015), Teoría de Grupos: Aplicación a la Mecánica Cuántica. México.

Rivero F. (2001), Introducción a los Números Complejos. Departamento de Matemáticas. Venezuela

Rodríguez V. (2013), Sobre los Cuaterniones, álgebras de Lie, y Matrices de Pauli. Teoría Básica y Aplicaciones Físicas.

Sánchez J. (1996), Escritos sobre Física y Filosofía de Wolfgang Pauli. Primera Edición.

Salcedo L. (2018), Física Matemática. Grupo de Lie, Rotaciones, Unitarios, Poincaré. Universidad de Granada, España.

Hernández S. (2014), Metodología de la Investigación. 6ta Edición. México

Zaldívar F. (2006), Introducción a la Teoría de Grupos. Sociedad Matemática Mexicana. México.

Zettili N. (2009), Mecánica Cuántica. Conceptos y Aplicaciones. Estados Unidos (USA).