

ESTRUCTURA DE LOS CUATERNIONES DE HAMILTON

Wilson Lucilo Heredia Amparo.

Wilsonheredia08@yahoo.com

Técnico del área de Matemática,

Distrito Educativo 16-01.

Cotuí. República Dominicana.

Escuela de Matemática. UTECO

Maestría en Matemática Pura.

Universidad Autónoma de Santo Domingo (UASD).

Resumen.

Este artículo presenta un análisis demostrativo de la estructura de los Cuaterniones de Hamilton. El mismo fue extraído del trabajo final (tesis) para optar por el título de Maestro en Matemática Pura en la Universidad Autónoma de Santo Domingo (UASD).

El propósito de este estudio es determinar qué tipo de estructuras algebraicas satisfacen el conjunto de los Cuaterniones de Hamilton, a través de una metodología deductiva; es decir, demostrando las propiedades del conjunto de los cuaterniones partiendo de premisas conocidas, de forma interpretativa mediante razonamientos lógicos.

Palabras claves: Estructura Algebraica, Cuaterniones de Hamilton, Operaciones con Cuaterniones y Espacio Vectorial.

INTRODUCCIÓN

Los cuaterniones no son únicamente una curiosidad algebraica. Tienen diversas aplicaciones que van desde la teoría de números, en donde pueden utilizarse para probar resultados, como el teorema dado por Lagrange que dice que todo número natural n puede expresarse como la suma de cuatro cuadrados perfectos, hasta aplicaciones físicas dentro del electromagnetismo, teoría de la relatividad y mecánica cuántica, entre otras.

Los cuaterniones en física representan rotaciones en el espacio. Son a menudo utilizados en gráficos por computadora y en el análisis geométrico asociado para representar la orientación de un objeto en un espacio tridimensional. El uso de los cuaterniones ofrece la ventaja de tener una representación no singular, más compacta y más rápida que las matrices. El estudio de la estructura de los cuaterniones posibilita una mayor comprensión de la complejidad que presentan las rotaciones en el espacio tridimensional en cuanto a su no conmutatividad para la multiplicación.

Los cuaterniones constituyen el conjunto numérico buscado por muchos años y por diversos matemáticos, que describiera puntos del espacio tridimensional en forma similar a como los números complejos describen puntos en el plano. Por lo que en el desarrollo de las matemáticas los cuaterniones tuvieron una gran importancia, siendo el primer ejemplo de un campo no conmutativo y la base del álgebra vectorial que se emplea actualmente, en la que las unidades imaginarias i , j , k pasaron a ser los vectores i , j , k .

El estudio de la estructura de los cuaterniones es importante porque el formalismo vectorial que se usa

actualmente, el cual fue desarrollado por J. W. Gibbs y O. Heaviside, tiene base en el álgebra de los cuaterniones. Los cuaterniones son una solución a múltiples problemas en geometría, mecánica y óptica. En la actualidad son imprescindibles en robótica y en visión por computadoras. En cada uno de estos aspectos mencionados, se hace necesario el conocimiento acerca de las propiedades algebraicas elementales de este conjunto numérico de las llamadas álgebras modernas. De ahí también la importancia que reviste el propósito de este estudio de las propiedades del conjunto de los cuaterniones; determinar qué tipo de estructuras algebraicas satisfacen los cuaterniones de Hamilton.

Desarrollo

I. Definiciones básicas.

Para estudiar la estructura de los cuaterniones de Hamilton se definen los siguientes aspectos:

1.1 Cuaternión:

Es un número de la forma $a + a_1i + a_2j + a_3k$, donde a, b, c y d son números reales y "i, j, k" se denomina parte imaginaria o parte vectorial.

1.2 Regla de Hamilton para la operación de multiplicación de cuaterniones:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$ij = -ji = k$$

$$jk = -kj = i$$

$$ki = -ik = j$$

1.3 Suma de cuaterniones:

Cada coordenada se suma con su homóloga del otro número.

Si $A = (a_1 + a_2i + a_3j + a_4k)$ y $B = (b_1 + b_2i + b_3j + b_4k)$, entonces:

$$\begin{aligned} A+B &= (a_1 + a_2i + a_3j + a_4k) + (b_1 + b_2i + b_3j + b_4k) \\ &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)i + (a_3 + b_3)j + (a_4 + b_4)k \end{aligned}$$

1.4 Multiplicación de cuaterniones:

Se multiplican como combinaciones lineales de las unidades imaginarias, que siguen la regla de Hamilton para la multiplicación.

Si $A = (a_1 + a_2i + a_3j + a_4k)$ y $B = (b_1 + b_2i + b_3j + b_4k)$; entonces:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (a_1 + a_2i + a_3j + a_4k) \cdot (b_1 + b_2i + b_3j + b_4k) \\ &= (a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4) + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3)i + \\ &\quad (a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2)j + (a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1)k. \end{aligned}$$

1.5 Producto de un escalar por un cuaternión:

Para multiplicar un escalar por un cuaternión se multiplica el escalar por cada componente del cuaternión y se obtiene otro cuaternión.

Sea $m \in \mathbb{R}$ y $A = (a_1 + a_2i + a_3j + a_4k)$, entonces:

$$mA = m(a_1 + a_2i + a_3j + a_4k) = (ma_1 + ma_2i + ma_3j + ma_4k).$$

1.6 Cuaternión conjugado:

Dado el cuaternión $A = (a_1 + a_2i + a_3j + a_4k)$, su cuaternión conjugado es:

$$A = (a_1 - a_2i - a_3j - a_4k).$$

1.7 Anillo:

Un conjunto no vacío K , se dice que es un anillo si en K están definidas dos operaciones denotadas por "+" y "." respectivamente, tales que para cualesquiera a, b, c de K .

- i. $a+b \in K$ [Cerradura]
- ii. $a+b = b+a$ [Conmutatividad]
- iii. $(a+b) + c = a +(b+c)$ [Asociatividad]
- iv. $\exists e \in k: a+e = a$ [Elemento neutro]
- v. $\exists (-a) \in k: a+(-a) = 0$ [Elemento inverso]
- vi. $a.b \in k$ [Cerradura]
- vii. $a.(b.c) = (a.b).c$ [Asociativa]
- viii. $a.(b+c) = a.b + a.c$ y
 $(b+c).a = b.a+c.a$ [Distributiva]

1.8 Espacio vectorial:

Es un conjunto V no vacío cuyos elementos reciben el nombre de vectores dotado de dos operaciones: una interna, llamada suma y otra externa, llamada multiplicación, que cumplen las siguientes propiedades:

Si $\forall u, v, w \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, entonces:

- i. $(u + v) + w = u + (v + w)$ [Asociatividad]
- ii. $u + v = v + u$ [conmutatividad]
- iii. $\exists e \in V: u+e = u$ [Elemento neutro]
- iv. $\exists (-u) \in V: u+(-u) = e$ [Elemento inverso]
- v. $(\alpha + \beta).u = \alpha u + \beta u$ [Distributiva respecto a la suma de escalares]

- vi. $\alpha.(u + v) = \alpha u + \alpha v$ [Distributiva respecto a la suma de vectores]
- vii. $\alpha.(\beta u) = (\alpha\beta)u$ [Asociativa para el producto de escalares]
- viii. $e.u = u$ [Elemento neutro]

II. PROPIEDADES DEL CONJUNTO DE LOS CUATERNIONES.

A continuación se presenta una demostración de las propiedades algebraicas fundamentales del conjunto de los cuaterniones de Hamilton, que lo relacionan con la estructura de anillo y de espacio vectorial.

Sea H el conjunto de los cuaterniones donde $H = \{a+bi+cj+dk: a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ y $A = (a_1+a_2i+a_3j+a_4k)$, $B = (b_1+b_2i+b_3j+b_4k)$, $C = (c_1+c_2i+c_3j+c_4k)$, elementos de H .

2.1 PROPIEDADES DE LA SUMA DE CUATERNIONES.

2.1.1 Clausura o cerradura:

Sea H el conjunto de los cuaterniones y $A = (a_1+a_2i+a_3j+a_4k)$, $B = (b_1+b_2i+b_3j+b_4k)$ elementos de H ; entonces: $\forall A, B \in H; A+B \in H$.

$$\begin{aligned} A+B &= (a_1+a_2i+a_3j+a_4k) + (b_1+b_2i+b_3j+b_4k) \\ &= [(a_1+b_1) + (a_2+b_2)i + (a_3+b_3)j + (a_4+b_4)k] \in H. \end{aligned}$$

Por definición de suma de cuaterniones (1.3).

Como los coeficientes de los cuaterniones son números reales y en ellos se cumple la propiedad de clausura, entonces: $(a_1+b_1) \in \mathbb{R}$, $(a_2+b_2) \in \mathbb{R}$, $(a_3+b_3) \in \mathbb{R}$

y $(a_4+b_4) \in \mathbb{R}$. De ahí, que $A+B = [(a_1+b_1) + (a_2+b_2)i + (a_3+b_3)j + (a_4+b_4)k]$ es un cuaternión. Por tanto $A+B \in H$.

2.1.2 Conmutatividad:

Sea H el conjunto de los cuaterniones y $A = (a_1+a_2i+a_3j+a_4k)$, $B = (b_1+b_2i+b_3j+b_4k)$ elementos de H ; entonces: $\forall A, B \in H; A+B = B+A$.

$$\begin{aligned} A+B &= (a_1+a_2i+a_3j+a_4k) + (b_1+b_2i+b_3j+b_4k) \\ &= (a_1+b_1) + (a_2+b_2)i + (a_3+b_3)j + (a_4+b_4)k. \end{aligned}$$

Por definición de suma de cuaterniones (1.3).

$$\begin{aligned} B+A &= (b_1+b_2i+b_3j+b_4k) + (a_1+a_2i+a_3j+a_4k) \\ &= (b_1+a_1) + (b_2+a_2)i + (b_3+a_3)j + (b_4+a_4)k. \end{aligned}$$

Por definición de suma de cuaterniones (1.3).

Como los coeficientes de los cuaterniones son números reales y en ellos se cumple la conmutatividad, entonces: $(b_1+a_1) = (a_1+b_1)$, $(b_2+a_2) = (a_2+b_2)$, $(b_3+a_3) = (a_3+b_3)$, $(b_4+a_4) = (a_4+b_4)$. De ahí, que $A+B = (a_1+b_1) + (a_2+b_2)i + (a_3+b_3)j + (a_4+b_4)k = (b_1+a_1) + (b_2+a_2)i + (b_3+a_3)j + (b_4+a_4)k = B+A$. Por tanto $A+B = B+A$.

2.1.3 Asociatividad:

Sea H el conjunto de los cuaterniones y $A = (a_1+a_2i+a_3j+a_4k)$,

$B = (b_1+b_2i+b_3j+b_4k)$, $C = (c_1+c_2i+c_3j+c_4k)$ elementos de H ; entonces:

$$\forall A, B, C \in H; A + (B+C) = (A+B) + C.$$

$$\begin{aligned} B+C &= (b_1+b_2i+b_3j+b_4k) + (c_1+c_2i+c_3j+c_4k) \\ &= (b_1+c_1) + (b_2+c_2)i + (b_3+c_3)j + (b_4+c_4)k. \end{aligned}$$

Por definición de suma de cuaterniones (1.3).

$$\begin{aligned} A + (B+C) &= (a_1+a_2i+a_3j+a_4k) + [(b_1+c_1) + (b_2+c_2)i + (b_3+c_3)j + (b_4+c_4)k] \\ &= a_1 + (b_1+c_1) + a_2i + (b_2+c_2)i + a_3j + (b_3+c_3)j + a_4k + (b_4+c_4)k. \end{aligned}$$

Por definición de suma de cuaterniones (1.3).

$$\begin{aligned} A + B &= (a_1+a_2i+a_3j+a_4k) + (b_1+b_2i+b_3j+b_4k) \\ &= (a_1+b_1) + (a_2+b_2)i + (a_3+b_3)j + (a_4+b_4)k. \end{aligned}$$

Por definición de suma de cuaterniones (1.3).

$$\begin{aligned} (A+B)+C &= [(a_1+b_1) + (a_2+b_2)i + (a_3+b_3)j + (a_4+b_4)k] + (c_1+c_2i+c_3j+c_4k) \\ &= (a_1+b_1) + c_1 + (a_2+b_2)i + c_2i + (a_3+b_3)j + c_3j + (a_4+b_4)k + c_4k. \end{aligned}$$

Por definición de suma de cuaterniones (1.3).

Como los coeficientes de los cuaterniones son números reales y en ellos se cumple la asociatividad, entonces, $a + (b + c) = (a + b) + c$. De ahí, que $A + (B+C) = (a_1+a_2i+a_3j+a_4k) + [(b_1+b_2i+b_3j+b_4k) + (c_1+c_2i+c_3j+c_4k)] = [(a_1+a_2i+a_3j+a_4k) + (b_1+b_2i+b_3j+b_4k)] + (c_1+c_2i+c_3j+c_4k) = (A+B)+C$. Por tanto $A + (B+C) = (A+B) + C$

2.1.4 Elemento neutro:

Sea H el conjunto de los cuaterniones. $A = (a_1 + a_2i + a_3j + a_4k)$ elemento de H y $e = (0 + 0i + 0j + 0k)$ el elemento neutro de la suma de cuaterniones, entonces: $A + e = A$.

$$\begin{aligned} A + e &= (a_1 + a_2i + a_3j + a_4k) + (0 + 0i + 0j + 0k) \\ &= (a_1 + 0) + (a_2 + 0)i + (a_3 + 0)j + (a_4 + 0)k \\ &= (a_1 + a_2i + a_3j + a_4k) = A. \end{aligned}$$

Por definición de suma de cuaterniones (1.3).

Como los coeficientes de los cuaterniones son números reales y en ellos se cumple la propiedad del elemento neutro de la suma, entonces, $(a_1 + 0) = a_1$, $(a_2 + 0) = a_2$, $(a_3 + 0) = a_3$, $(a_4 + 0) = a_4$.

De ahí, que $A + e = (a_1 + 0) + (a_2 + 0)i + (a_3 + 0)j + (a_4 + 0)k = (a_1 + a_2i + a_3j + a_4k) = A$. Por tanto $A + e = A$.

2.1.5 Elemento simétrico:

Sea H el conjunto de los cuaterniones. $A = (a_1 + a_2i + a_3j + a_4k)$ elemento de H ,

$-A = (-a_1 - a_2i - a_3j - a_4k)$ elemento de H y el elemento simétrico de A , para la suma de cuaterniones y $e = (0 + 0i + 0j + 0k)$, el elemento neutro de la suma de cuaterniones, entonces, $A + (-A) = e$.

$$A + (-A) = (a_1 + a_2i + a_3j + a_4k) + [(-a_1) + (-a_2i) + (-a_3j) + (-a_4k)]$$

$$= (a_1 - a_1) + (a_2 - a_2)i + (a_3 - a_3)j + (a_4 - a_4)k = (0 + 0i + 0j + 0k) = e$$

Por definición de suma de cuaterniones (1.3) y elemento neutro (2.1.4).

Como los coeficientes de los cuaterniones son números reales y ellos cumplen con la propiedad del elemento simétrico, entonces: $(a_1 - a_1) = 0$, $(a_2 - a_2) = 0$, $(a_3 - a_3) = 0$,

$$(a_4 - a_4) = 0. \text{ De ahí, que } (a_1 - a_1) + (a_2 - a_2)i + (a_3 - a_3)j + (a_4 - a_4)k = (0 + 0i + 0j + 0k) = e.$$

$$\text{Por tanto } A + (-A) = e.$$

2.2 PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE CUATERNIONES.

2.2.1 Clausura o cerradura:

Sea H el conjunto de los cuaterniones y $A = (a_1 + a_2i + a_3j + a_4k)$, $B = (b_1 + b_2i + b_3j + b_4k)$ elementos de H ; entonces, $\forall A, B \in H; A \cdot B \in H$.

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (a_1 + a_2i + a_3j + a_4k)(b_1 + b_2i + b_3j + b_4k) \\ &= (a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4) + (a_1b_2 - a_2b_1 - a_3b_4 - a_4b_3)i \\ &\quad + (a_1b_3 - a_2b_4 - a_3b_1 - a_4b_2)j + (a_1b_4 - a_2b_3 - a_3b_2 - a_4b_1)k. \end{aligned}$$

Por definición de multiplicación de cuaterniones (1.4).

Como los coeficientes de los cuaterniones son números reales y en ellos se cumple la propiedad de clausura, entonces, $a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, a_4b_4$ son números reales. De ahí que $A \cdot B = (a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4) + (a_1b_2 - a_2b_1 - a_3b_4 - a_4b_3)i$

$+ (a_1b_3 - a_2b_4 - a_3b_1 - a_4b_2)j + (a_1b_4 - a_2b_3 - a_3b_2 - a_4b_1)k$,
es un cuaternión.

Por tanto $A.B \in H$.

2.2.2 Conmutatividad:

Sea H el conjunto de los cuaterniones y $A = (a_1 + a_2i + a_3j + a_4k)$, $B = (b_1 + b_2i + b_3j + b_4k)$ elementos de H , entonces: $\forall A, B \in H; A.B = B.A \in H$.

$$\begin{aligned} A.B &= (a_1 + a_2i + a_3j + a_4k)(b_1 + b_2i + b_3j + b_4k) \\ &= (a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4) + (a_1b_2 - a_2b_1 - a_3b_4 - a_4b_3)i \\ &\quad + (a_1b_3 - a_2b_4 - a_3b_1 - a_4b_2)j + (a_1b_4 - a_2b_3 - a_3b_2 - a_4b_1)k. \end{aligned}$$

Por definición de multiplicación de cuaterniones (1.4).

$$\begin{aligned} B.A &= (b_1 + b_2i + b_3j + b_4k)(a_1 + a_2i + a_3j + a_4k) \\ &= (b_1a_1 - b_2a_2 - b_3a_3 - b_4a_4) + (b_1a_2 - b_2a_1 - b_3a_4 - b_4a_3)i \\ &\quad + (b_3a_1 - b_2a_4 + b_3a_1 + b_4a_2)j + (b_4a_1 + b_2a_3 - b_3a_2 + b_1a_4)k. \end{aligned}$$

Por definición de multiplicación de cuaterniones (1.4).

Como $i.j \neq j.i$, $j.k \neq k.j$ y $i.k \neq k.i$; entonces claramente $A.B \neq B.A$

2.2.3 Producto de un Cuaternión por su conjugado:

Sea H el conjunto de los cuaterniones, $A = (a_1 + a_2i + a_3j + a_4k)$, elemento de H y sea

$A = (a_1 - a_2i - a_3j - a_4k)$ el conjugado de A , entonces, $\forall A \in H$ $A.A = a^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 A \cdot A &= (a + a_1 i + a_2 j + a_3 k) (a - a_1 i - a_2 j - a_3 k) \\
 &= (a \cdot a + a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 + a_3 \cdot a_3) + (-a \cdot a_1 + a_1 \cdot a - a_2 \cdot a_3 + a_3 \cdot a_2) \\
 &\quad i + (-a \cdot a_2 + a_2 \cdot a - a_3 \cdot a_1 + a_3 \cdot a_1) j + (-a \cdot a_3 - a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_1 + a_3 \cdot a) k \\
 &= a^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Por definición de multiplicación de cuaterniones (1.4) y propiedad cancelativa de los números reales.

Como los coeficientes de los cuaterniones son números reales y en ellos se cumple la propiedad conmutativa de la multiplicación, entonces: $(a \cdot a_1 = a_1 \cdot a, a_2 \cdot a_3 = a_3 \cdot a_2, \dots)$ y además se cumple la propiedad cancelativa para los elementos iguales con signos contrarios, esto es; $-a \cdot a_1 + a_1 \cdot a = -a_2 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_3 = -a \cdot a_2 + a_2 \cdot a \dots = 0$ y como el producto de un número real por si mismo es igual a su cuadrado, es decir; $a \cdot a = a^2$. Por tanto:

$$A \cdot A = (a \cdot a + a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 + a_3 \cdot a_3) = a^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \in \mathbb{R}.$$

2.2.4 Asociatividad:

Sea H el conjunto de los cuaterniones y $A = (a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k)$, $B = (b_1 + b_2 i + b_3 j + b_4 k)$, $C = (c_1 + c_2 i + c_3 j + c_4 k)$, elementos de H ; entonces: $\forall A, B, C \in H$; $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.

$$\begin{aligned}
 (B \cdot C) &= (b_1 + b_2 i + b_3 j + b_4 k) \cdot (c_1 + c_2 i + c_3 j + c_4 k) \\
 &= (b_1 c_1 - b_2 c_2 - b_3 c_3 - b_4 c_4) + (b_1 c_2 - b_2 c_1 - b_3 c_4 - b_4 c_3) i \\
 &\quad + (b_1 c_3 - b_2 c_4 + b_4 c_1 + b_3 c_2) j + (b_1 c_4 + b_2 c_3 - b_3 c_2 + b_4 c_1) k.
 \end{aligned}$$

Por definición de multiplicación de cuaterniones (1.4).

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) &= (a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k) \cdot [(b_1 c_1 - b_2 c_2 - b_3 c_3 - b_4 c_4) + \\
 & (b_1 c_2 - b_2 c_1 - b_3 c_4 - b_4 c_3) i + \\
 & (b_1 c_3 - b_2 c_4 + b_4 c_1 + b_3 c_2) j + (b_1 c_4 + b_2 c_3 - b_3 c_2 + b_4 c_1) k] \\
 &= [a_1 (b_1 c_1 - b_2 c_2 - b_3 c_3 - b_4 c_4) - a_2 (b_1 c_2 - b_2 c_1 - b_3 c_4 - b_4 c_3) \\
 & - [a_3 (b_1 c_3 - b_2 c_4 - b_3 c_1 - b_4 c_2) - a_4 (b_1 c_4 - b_2 c_3 - b_3 c_2 - b_4 c_1)] \\
 & + [a_1 (b_1 c_2 + b_2 c_1 + b_3 c_4 - b_4 c_3) + a_2 (b_1 c_1 - b_2 c_2 - b_3 c_3 - b_4 c_4) \\
 & + a_3 (b_1 c_4 - b_2 c_3 - b_3 c_2 - b_4 c_1) - a_4 (b_1 c_3 - b_2 c_4 - b_3 c_1 - b_4 c_2)] i \\
 & + [a_1 (b_1 c_3 - b_2 c_4 + b_3 c_1 - b_4 c_2) - a_2 (b_1 c_4 + b_2 c_3 - b_3 c_2 + b_4 c_1) \\
 & + a_3 (b_1 c_1 - b_2 c_2 - b_3 c_3 - b_4 c_4) + a_4 (b_1 c_2 + b_2 c_1 + b_3 c_4 - b_4 c_3)] j \\
 & + [a_1 (b_1 c_4 + b_2 c_3 - b_3 c_2 + b_4 c_1) + a_2 (b_1 c_3 - b_2 c_4 + b_3 c_1 + b_4 c_2) \\
 & - a_3 (b_1 c_2 + b_2 c_1 + b_3 c_4 - b_4 c_3) + a_4 (b_1 c_1 - b_2 c_2 - b_3 c_3 - b_4 c_4)] k.
 \end{aligned}$$

Por definición de multiplicación de cuaterniones (1.4).

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= (a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k) (b_1 + b_2 i + b_3 j + b_4 k) \\
 &= (a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4) + (a_1 b_2 - a_2 b_1 - a_3 b_4 - a_4 b_3) i \\
 &+ (a_1 b_3 - a_2 b_4 - a_3 b_1 - a_4 b_2) j + (a_1 b_4 - a_2 b_3 - a_3 b_2 - a_4 b_1) k.
 \end{aligned}$$

Por definición de multiplicación de cuaterniones (1.4).

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} &= [(a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_4 + a_4 b_3) i \\
 &+ (a_1 b_3 - a_2 b_4 + a_3 b_1 + a_4 b_2) j + (a_1 b_4 + a_2 b_3 - a_3 b_2 + a_4 b_1) k] \\
 &\cdot (c_1 - c_2 i + c_3 j - c_4 k) \\
 &= [(a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4) c_1 - (a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_4 - a_4 b_3) c_2 \\
 &- (a_1 b_3 - a_2 b_4 + a_3 b_1 + a_4 b_2) c_3 - (a_1 b_4 - a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_4 b_1) c_4] \\
 &+ [(a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4) c_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_4 - a_4 b_3) c_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2) c_4 - (a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1) \\
& c_3] i \\
& +[(a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4) c_3 + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3) c_4 \\
& +(a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2) c_1 + (a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1) \\
& c_2] j \\
& +[(a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4) c_4 + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3) c_3 \\
& - (a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2) c_2 + (a_1b_4 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_1) \\
& c_1] k.
\end{aligned}$$

Por definición de multiplicación de cuaterniones (1.4).

Como los coeficientes de los cuaterniones son números reales y estos cumplen con la propiedad asociativa de la multiplicación, entonces, $a(b.c) = (a.b).c$. De ahí, que: $A.(B.C) = (a_1+a_2i+a_3j+a_4k).[(b_1+b_2i+b_3j+b_4k).(c_1+c_2i+c_3j+c_4k)]$
 $= [(a_1+a_2i+a_3j+a_4k).(b_1+b_2i+b_3j+b_4k)].(c_1+c_2i+c_3j+c_4k)$
 $= (A.B).C$. Por tanto $A.(B.C) = (A.B).C$.

2.2.5 Elemento neutro:

Sea H el conjunto de los cuaterniones. $A = (a_1+a_2i+a_3j+a_4k)$ elemento de H y $e = (1+0i+0j+0k)$ el elemento neutro de la multiplicación de cuaterniones, entonces:

$$A.e = A.$$

$$\begin{aligned}
A.e &= (a_1+a_2i+a_3j+a_4k)(1+0i+0j+0k) \\
&= (a_1+0+0+0) + (0+a_2i+0+0) + (0+0+a_3j+0) + (0+0+0+a_4k) \\
&= (a_1+a_2i+a_3j+a_4k) = A.
\end{aligned}$$

Por definición de multiplicación de cuaterniones (1.4).

Como los coeficientes de los cuaterniones son números reales y en ellos se cumple la propiedad del elemento neutro, esto es: $a \cdot 1 = a$.

De ahí, que $A \cdot e = (a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k) \cdot (1 + 0i + 0j + 0k) = A$.
Por tanto $A \cdot e = A$.

2.2.6 Distributiva de la multiplicación respecto de la suma.

Sea H el conjunto de los cuaterniones y $A = (a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k)$,

$B = (b_1 + b_2 i + b_3 j + b_4 k)$, $C = (c_1 + c_2 i + c_3 j + c_4 k)$ elementos de H ; entonces:

$$\forall A, B, C, \in H; A(B+C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$

$$(B+C) = (b_1 + b_2 i + b_3 j + b_4 k) + (c_1 + c_2 i + c_3 j + c_4 k)$$

$$= (b_1 + c_1) + (b_2 + c_2) i + (b_3 + c_3) j + (b_4 + c_4) k.$$

Por definición de suma de cuaterniones (1.3).

$$A \cdot (B+C) = (a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k) \cdot [(b_1 + c_1) + (b_2 + c_2) i + (b_3 + c_3) j + (b_4 + c_4) k]$$

$$= [a_1(b_1 + c_1) - a_2(b_2 + c_2) - a_3(b_3 + c_3) - a_4(b_4 + c_4)] + [a_1(b_2 + c_2) + a_2(b_1 + c_1) + a_3(b_4 + c_4) - a_4(b_3 + c_3)] i + [a_1(b_3 + c_3) - a_2(b_4 + c_4) + a_3(b_1 + c_1) + a_4(b_2 + c_2)] j$$

$$+ [a_1(b_4 + c_4) + a_2(b_3 + c_3) - a_3(b_2 + c_2) + a_4(b_1 + c_1)] k$$

$$= [(a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4) + (a_1 c_1 - a_2 c_2 - a_3 c_3 - a_4 c_4)]$$

$$+ [(a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_4 + a_4 b_3) + (a_1 c_2 + a_2 c_1 + a_3 c_4 + a_4 c_3)] i$$

$$+ [(a_1 b_3 - a_2 b_4 + a_3 b_1 + a_4 b_2) + (a_1 c_3 - a_2 c_4 + a_3 c_1 + a_4 c_2)] j$$

$$+ [(a_1 b_4 + a_2 b_3 - a_3 b_2 + a_4 b_1) + (a_1 c_4 + a_2 c_3 - a_3 c_2 - a_4 c_1)] k.$$

Por definición de multiplicación de cuaterniones (1.4).

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= (a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k) (b_1 + b_2 i + b_3 j + b_4 k) \\
 &= (a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4) + (a_1 b_2 - a_2 b_1 - a_3 b_4 - a_4 b_3) i \\
 &+ (a_1 b_3 - a_2 b_4 - a_3 b_1 - a_4 b_2) j + (a_1 b_4 - a_2 b_3 - a_3 b_2 - a_4 b_1) k.
 \end{aligned}$$

Por definición de multiplicación de cuaterniones (1.4).

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) &= (a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k) (c_1 + c_2 i + c_3 j + c_4 k) \\
 &= (a_1 c_1 - a_2 c_2 - a_3 c_3 - a_4 c_4) + (a_1 c_2 - a_2 c_1 - a_3 c_4 - a_4 c_3) i \\
 &+ (a_1 c_3 - a_2 c_4 - a_3 c_1 - a_4 c_2) j + (a_1 c_4 - a_2 c_3 - a_3 c_2 - a_4 c_1) k.
 \end{aligned}$$

Por definición de multiplicación de cuaterniones (1.4).

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) &= [(a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4) + (a_1 b_2 - a_2 b_1 - a_3 b_4 - a_4 b_3) i \\
 &+ (a_1 b_3 - a_2 b_4 - a_3 b_1 - a_4 b_2) j + (a_1 b_4 - a_2 b_3 - a_3 b_2 - a_4 b_1) k] \\
 &+ [(a_1 c_1 - a_2 c_2 - a_3 c_3 - a_4 c_4) + (a_1 c_2 - a_2 c_1 - a_3 c_4 - a_4 c_3) i \\
 &+ (a_1 c_3 - a_2 c_4 - a_3 c_1 - a_4 c_2) j + (a_1 c_4 - a_2 c_3 - a_3 c_2 - a_4 c_1) k] \\
 &= [(a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4) + (a_1 c_1 - a_2 c_2 - a_3 c_3 - a_4 c_4)] \\
 &+ [(a_1 b_2 - a_2 b_1 - a_3 b_4 - a_4 b_3) + (a_1 c_2 - a_2 c_1 - a_3 c_4 - a_4 c_3)] i \\
 &+ [(a_1 b_3 - a_2 b_4 - a_3 b_1 - a_4 b_2) + (a_1 c_3 - a_2 c_4 - a_3 c_1 - a_4 c_2)] j \\
 &+ [(a_1 b_4 - a_2 b_3 - a_3 b_2 - a_4 b_1) + (a_1 c_4 - a_2 c_3 - a_3 c_2 - a_4 c_1)] k.
 \end{aligned}$$

Por definición de multiplicación de cuaterniones (1.4).

Como los coeficientes de los cuaterniones son números reales y en ellos se cumple la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma, entonces:

$$\begin{aligned}
 a(b+c) &= ab + ac. \text{ De ahí, que } \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k) \cdot \\
 &[(b_1 + b_2 i + b_3 j + b_4 k) + (c_1 + c_2 i + c_3 j + c_4 k)] = [(a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k) \cdot
 \end{aligned}$$

$$(b_1 + b_2i + b_3j + b_4k) + [(a_1 + a_2i + a_3j + a_4k) \cdot (c_1 + c_2i + c_3j + c_4k)] \\ = A \cdot B + A \cdot C. \text{ Por tanto: } A(B+C) = (A \cdot B) + (A \cdot C).$$

2.2.7 Distribución del producto de un Cuaternión respecto de la suma de escalares:

Sea H el conjunto de los cuaterniones, $A = (a_1 + a_2i + a_3j + a_4k)$ y m, n números reales, entonces, $\forall m, n \in \mathbb{R}$ y $A \in H$;
 $mA + nA = (m+n)A$.

$$mA = m(a_1 + a_2i + a_3j + a_4k) \\ = (ma_1 + ma_2i + ma_3j + ma_4k).$$

Por definición de producto de un escalar por un cuaternión. (1.5).

$$nA = n(a_1 + a_2i + a_3j + a_4k) = (na_1 + na_2i + na_3j + na_4k).$$

Por definición de producto de un escalar por un cuaternión. (1.5).

$$mA + nA = (ma_1 + ma_2i + ma_3j + ma_4k) + (na_1 + na_2i + na_3j + na_4k)$$

$$= (m+n)a_1 + (m+n)a_2i + (m+n)a_3j + (m+n)a_4k.$$

Por definición de suma de cuaterniones (1.3).

$$(m+n)A = (m+n)(a_1 + a_2i + a_3j + a_4k)$$

$$= (m+n)a_1 + (m+n)a_2i + (m+n)a_3j + (m+n)a_4k.$$

Por definición de producto de un escalar por un cuaternión. (1.5).

Como los coeficientes de los cuaterniones son números reales y estos cumplen con la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma, entonces:

$(a + b)(a + c) = a(b+c)$, para $a, b, c \in \mathbb{R}$. De ahí, que $mA + nA = m(a_1+a_2i+a_3j+a_4k) + n(a_1+a_2i+a_3j+a_4k) = (m+n)(a_1+a_2i+a_3j+a_4k) = (m+n)A$. Por tanto: $mA + nA = (m+n)A$.

2.2.8 Distribución del producto de un escalar respecto de la suma de cuaterniones:

Sea H el conjunto de los cuaterniones. $A = (a_1+a_2i+a_3j+a_4k)$, $B = (b_1+b_2i+b_3j+b_4k)$ elementos de H y m un número real, entonces:

$$\forall m \in \mathbb{R} \text{ y } A, B \in H; m(A + B) = mA + mB.$$

$$\begin{aligned} A + B &= (a_1+a_2i+a_3j+a_4k) + (b_1+b_2i+b_3j+b_4k) \\ &= [(a_1+b_1) + (a_2+b_2)i + (a_3+b_3)j + (a_4+b_4)k]. \end{aligned}$$

Por definición de suma de cuaterniones (1.3).

$$\begin{aligned} m(A + B) &= m[(a_1+b_1) + (a_2+b_2)i + (a_3+b_3)j + (a_4+b_4)k] \\ &= m(a_1+b_1) + m(a_2+b_2)i + m(a_3+b_3)j + m(a_4+b_4)k. \end{aligned}$$

Por definición de producto de un escalar por un cuaternión. (1.5).

$$mA = m(a_1+a_2i+a_3j+a_4k) = (ma_1+ma_2i+ma_3j+ma_4k).$$

Por definición de producto de un escalar por un cuaternión. (1.5).

$$mB = m(b_1 + b_2i + b_3j + b_4k) = (mb_1 + mb_2i + mb_3j + mb_4k).$$

Por definición de producto de un escalar por un cuaternión. (1.5).

$$mA + mB = (ma_1 + ma_{2i} + ma_{3j} + ma_{4k}) + (mb_1 + mb_2i + mb_3j + mb_4k)$$

$$= (ma_1 + mb_1) + (ma_2 + mb_2)i + (ma_3 + mb_3)j + (ma_4 + mb_4)k$$

$$= m(a_1 + b_1) + m(a_2 + b_2)i + m(a_3 + b_3)j + m(a_4 + b_4)k.$$

Por definición de suma de cuaterniones (1.3).

Por distribución del producto de un cuaternión respecto de la suma de escalares (3.2.7), $m(A+B) = m[(a_1 + a_{2i} + a_{3j} + a_{4k}) + (b_1 + b_2i + b_3j + b_4k)] = [m(a_1 + a_{2i} + a_{3j} + a_{4k}) + m(b_1 + b_2i + b_3j + b_4k)] = mA + mB$. Por tanto $m(A+B) = mA + mB$.

2.2.9 Asociatividad del producto de un cuaternión y dos escalares:

Sea H el conjunto de los cuaterniones. $A = (a_1 + a_{2i} + a_{3j} + a_{4k})$, elemento de H y m, n números reales, entonces: $\forall m, n \in \mathbb{R}$ y $A \in H$; $m(A.n) = (mA)n$.

$$m(A.n) = m[(a_1 + a_{2i} + a_{3j} + a_{4k})n]$$

$$= m(na_1 + na_{2i} + na_{3j} + na_{4k})$$

$$= (mna_1 + mna_{2i} + mna_{3j} + mna_{4k}).$$

Por definición de producto de un escalar por un cuaternión. (1.5).

$$\begin{aligned}
 (mA) n &= [m(a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k)]n \\
 &= (ma_1 + ma_2 i + ma_3 j + ma_4 k)n \\
 &= (mna_1 + mna_2 i + mna_3 j + mn a_4 k).
 \end{aligned}$$

Por definición de producto de un escalar por un cuaternión. (1.5).

Como los coeficientes de los cuaterniones son números reales y estos cumplen con la propiedad asociativa de la multiplicación, entonces, $a(b.c) = (ab).c$. De ahí, que $m(A.n) = m[(a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k)n] = [m(a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k)]n = (mA) n$. Por tanto $m(A.n) = (mA) n$.

III. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS Y CONCLUSIONES.

En la sección anterior se demostró que el conjunto de los cuaterniones de Hamilton cumple para la operación suma con las siguientes propiedades: **clausura**; $\forall A, B \in H; A+B \in H$ (2.1.1); dados dos cuaterniones, la suma de ellos es otro cuaternión. **Conmutativa**; $\forall A, B \in H; A+B = B+A$ (2.1.2); por la conmutatividad de los números reales se verifica que el orden de sumar dos cuaterniones no altera la suma. **Asociativa**; $\forall A, B, C \in H; A+(B+C) = (A+B)+C$ (2.1.3); por asociatividad de los números reales se demuestra que la suma cumple con dicha propiedad. **Elemento neutro**, Si $e = (0 + 0i + 0j + 0k) \in H$; entonces, $A+e = e+A = A$ (2.1.4); si se suma un cuaternión con el elemento neutro resulta el mismo cuaternión dado. **Elemento simétrico**; Si $A \in H$, entonces: $(-A) \in H$ y $A+(-A) = (-A)+A = e$ (2.1.5); al sumar un cuaternión con su simétrico se obtiene el elemento neutro de la operación.

Mientras que para la multiplicación de cuaterniones se demostró que cumple las siguientes propiedades: **Clausura**; $\forall A, B \in H; A \cdot B \in H$ (2.2.1); la multiplicación de dos cuaterniones dados es otro cuaternión. **Asociativa**; $\forall A, B, C \in H; A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ (2.2.4); por asociatividad de los números reales se demuestra que la multiplicación de cuaterniones cumple con dicha propiedad. **Distributiva de la multiplicación respecto de la suma**; $\forall A, B, C \in H; A(B+C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$ (2.2.5); el producto de un cuaternión por la suma de otros dos, es igual a la suma del producto del primero con el segundo y el primero con el tercero.

Con el cumplimiento de las propiedades en el párrafo anterior se demostró que el conjunto de los cuaterniones posee una estructura de anillo. En el punto 2.2.2, se demostró que el conjunto de los cuaterniones no cumple con la propiedad conmutativa de la multiplicación.

Se demostró también el cumplimiento de las siguientes propiedades: **Distributiva respecto de la suma de escalares**; $\forall m, n \in R$ y $A \in H; mA + nA = (m+n)A$ (2.2.7); el producto de un cuaternión con la suma de dos escalares, es igual a la suma del producto del cuaternión por dichos escalares. **Distributiva respecto de la suma de cuaterniones**; $\forall m \in R$ y $A, B \in H; m(A+B) = mA + mB$ (2.2.8); el producto de un escalar por la suma de dos cuaterniones, es igual a la suma del producto del escalar con el primer cuaternión y el producto del escalar con el segundo cuaternión. **Asociativa para el producto de escalares y un cuaternión**; $\forall m, n \in R$ y $A \in H; m(A \cdot n) = (mA)n$ (2.2.9); el orden en que se asocien dos escalares dados y un cuaternión, para la operación de multiplicación no altera el resultado. Estas propie-

dades complementadas con la estructura de anillo que tienen los cuaterniones, demuestran que el conjunto de los cuaterniones también tienen estructura de espacio vectorial.

Bibliografía:

- Favieri, A. (2009). *Introducción a los cuaterniones* (1ra. Ed.). Argentina. Universidad Tecnológica Nacional.
- Fulton, W. (1971). *Curvas Algebraicas* (1ra. Ed.). Barcelona. Editorial Reverté.
- González, N. (1996). *Algebra Conmutativa Básica* (1ra. Ed.) Universidad de Extremadura.
- Guerrero, H., Pacheco, R. & Efrén, P. (2009). *El Teorema Fundamental Del Álgebra De Los Cuaterniones* (1ra. Ed.). Yucatán. Editorial SMM.
- Gutiérrez, S. (2005). *Hamilton: La liberación del álgebra* (1ra. Ed.). Valencia. Editorial Suma.
- Hankins, T. (1980). *Sir William Rowan Hamilton* (1ra. Ed.). Estados Unidos. The Johns Hopkins University Press.
- Hartshorne, R. (1977). *Algebraic Geometry* (1ra. Ed.). Berlín. Springer Verlag.
- Heistein, I. N. (1975). *Álgebra Moderna* (1ra. Ed.). México. Editorial Trinillas.
- Heistein, I. (1988). *Álgebra Abstracta* (1ra. Ed.). México. Editorial Iberoamericana.
- Lam, T. (2001). *A First Course in Noncommutative Rings* (2da. Ed.). Springer. Verlan.
- Martínez, J. (2007). *Grupos Finitos Y Sus Representaciones* (1ra. Ed.). Argentina. Universidad Nacional de Córdoba.

- Matsumura, D. (1970). *Commutative Algebra* (1ra. Ed.). New York. Editorial W.A. Benjamin Co.
- Ruiz, A. (2009). *Historia y filosofía de las matemáticas* (1ra. Ed.) Universidad de Costa Rica.
- Sánchez, J. (2011). *Pensamiento Matemático*. Revista de investigación GJE (No. 1). Madrid. Editorial de la Universidad Politécnica de Madrid.