

DINAMICA DE OPERADORES DESPLAZAMIENTO EN ESPACIOS DE SUCESIONES DE BANACH

Primera Parte

Víctor José Galán Céspedes, M.A.

Cursa Doctorado en Matemáticas Multidisciplinares UPV-INTEC
Director General de Pruebas Nacionales,
Ministerio de Estado de Educación

Introducción

El propósito de este trabajo es el de caracterizar algunas propiedades dinámicas de operadores desplazamiento (backward shift) y sus aplicaciones al operador derivada. Con él se cumple con el requisito final para la defensa del Diploma de Estudios Avanzados (DEA) del Doctorado en Matemáticas Multidisciplinares, impartido por acuerdo entre la Universidad Politécnica de Valencia en España y el Instituto Tecnológico de Santo Domingo en la República Dominicana.

El tema central del trabajo versa sobre la hiperciclicidad y caos de operadores y el mismo es relativamente joven como objeto de estudio de la investigación matemática. Es en los últimos treinta años cuando se ha abordado más decididamente la hiperciclicidad como tema de estudio, siendo en la actualidad parte de muchas líneas de investigación académica y de proyectos de mucho valor operativo.

La base de la hiperciclicidad como tema de estudio de los investigadores matemáticos se constituyó entre

finales de los años veinte e inicio de los ochenta. En el 1929, George David Birkhoff probó la existencia de una función entera $g(z)$ cuyo conjunto de trasladadas $\{fg(z + na), n = 0; 1; 2, \dots\}$ g y $a \neq 0$, es denso en el espacio de todas las funciones enteras $H(C)$ dotado de la topología compacta abierta. Más adelante, en el 1952 G. R. MacLane construyó una función entera en la que una sucesión de derivadas aproxima uniformemente en compactos de C a cualquier otra función entera.

En ambos casos lo que obtenemos es la existencia de una función "universal" para el operador traslación o el operador derivada cuyas iteradas aproximan cualquier otra función enteras en la topología de convergencia uniformemente en conjuntos compactos de C . Estos dos clásicos resultados del análisis funcional se consideran el punto de inicio de la hiperciclicidad y en la actualidad ha adquirido identidad propia.

Posteriormente, S. Rolewicz abordó el asunto relacionado con la existencia de operadores hipercíclicos en espacios l^p con $1 \leq p < \infty$, pero sin emplear la estructura simbólica actual. Él se planteó como problema el estudio de la existencia de operadores hipercíclicos en espacios de Banach y de Hilbert. A partir de Rolewicz han sido muchos los que se han dedicado al estudio de la hiperciclicidad: se pueden citar, C. Kitai, que introduce una condición suficiente de hiperciclicidad, pero al no publicarla es dada a conocer por R. Gethner y J. Shapiro, quienes demuestran el criterio de hiperciclicidad y deducen los resultados de Birkhoff, MacLane y Rolewicz; luego J. Bés mejora estos resultados; también C. Chan, H. Salas y L. Bernal hicieron significativos aportes a la mejora del estudio del tema, entre otros.

Ahora bien, dado un vector x de un espacio vectorial topológico X y una aplicación continua $T: X \rightarrow X$, se dice que x es hipercíclico respecto a T si el conjunto formado por las órbitas de x bajo T es denso en X . Las órbitas se generan al iterar a T . Un operador es hipercíclico si posee un vector hipercíclico. Si en lugar de T se considera una familia de operadores $\{T_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ tal que $\{T_{i_x}\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ es denso en X , entonces surge un concepto más fuerte llamado **universalidad**, donde la hiperciclicidad de un operador T es equivalente a la universalidad de la sucesión de operadores $\{T_n : = T^n\}_{n \geq 1}$.

Más recientemente ha aparecido el estudio de la hiperciclicidad de operadores ligado al análisis de los sistemas dinámicos discretos. Uno de los aportes más significativos en este orden lo constituye la definición de caos dada por R. Devaney: una aplicación continua en un espacio métrico se dice caótica si es transitiva, el conjunto de puntos periódicos es denso en el espacio y tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales (ver Devaney [14]).

Nuestro contexto de trabajo va a ser el espacio de Banach, esto es, un espacio vectorial X , con norma $\|\cdot\|$ de forma que su métrica asociada es $p(x,y) = \|x-y\|$, y tal que (X,p) es un espacio métrico completo. Además como estamos interesados en encontrar órbitas densas de dichos espacios, y teniendo en cuenta que el de las órbitas es un conjunto numerable nos limitaremos a espacios de Banach l^p separables. De manera especial trabajaremos en los espacios ponderados por una sucesión.

La presentación del trabajo se organiza en tres partes. En la primera, hacemos una breve descripción de las definiciones y los resultados básicos en que sus-

tentamos todo el desarrollo de la investigación. En la segunda parte presentamos las propiedades con las que caracterizamos la hiperciclicidad, el mezclante y el caos para operadores desplazamientos unilaterales y bilaterales. Finalmente, en la tercera parte trabajamos los operadores en espacios de Bergman generalizados y el operador derivada en espacios de Hilbert de funciones enteras. Aquí es donde caracterizamos la hiperciclicidad, el mezclante y el caos de esos operadores estableciendo un puente con las caracterizaciones sobre hiperciclicidad, el mezclante y el caos de operadores desplazamiento que ya hicimos en el capítulo 2.

Capítulo 1

Definiciones y resultados básicos

Como se ha dicho, el objetivo de este trabajo es el de caracterizar algunas propiedades dinámicas de operadores desplazamiento (backward shift) y sus aplicaciones al operador derivada". En este capítulo se tratan las definiciones y los resultados básicos alrededor del tema trabajado.

1.1 Dinámica discreta en espacios métricos

En esta sección se aborda la dinámica discreta en espacios métricos. Una idea muy importante para el estudio es la relacionada con el comportamiento de las órbitas del conjunto $\text{Orb}(T, x) := \{x, Tx, T^2x, T^3x, \dots\}$, donde T^n es la n -ésima iteración de T . Al par (X, T) donde X es un espacio métrico y T es una aplicación continua definida de $X \rightarrow X$, se le llama *sistema dinámico discreto*.

Inicialmente el estudio de los sistemas dinámicos estuvo relacionado al mundo de la Física, la Ingenie-

ría y la Astronomía básicamente, con los trabajos de Laplace, Poincaré, Lorentz y otros. De esos inicios se desprende la primera clasificación de los mismos, que se fundamentó en la idea de si el comportamiento del conjunto $\text{Orb}(T, x)$ era predecible o no hacia el futuro; si lo era se le llamó sistema dinámico determinista y si no lo era se usó el calificativo de no determinista.

Definición 1.1.1 Es importante resaltar algunas ideas relacionadas con el caos y los sistemas dinámicos.

Punto fijo se dice que x_0 es un punto fijo de T si $Tx_0 = x_0$. Si T es continua y la órbita $\text{Orb}(T, x)$ converge a un punto x^* , entonces este valor x^* es un punto fijo de T .

Punto periódico Se dice que x_* es un punto periódico para T si existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k(x_*) = x_*$ (al menor k que permite esta igualdad se le llama período de x^*).

Existen puntos periódicos atractivos, puntos periódicos repulsivos y puntos periódicos de otra naturaleza.

Definición 1.1.2 También es importante destacar las condiciones en que dos sistemas dinámicos son equivalentes, es decir, en qué condiciones se cumple una relación de equivalencia entre ellos. Para esto, sean $T: X \rightarrow X$ y $S: Y \rightarrow Y$ dos sistemas dinámicos:

Simiconjugación. Se dice que S es una semiconjugación de T si existe una aplicación continua $\phi: X \rightarrow Y$ con rango denso de tal modo que $S \circ \phi = \phi \circ T$, es decir, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & X \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ Y & \xrightarrow{S} & Y \end{array}$$

Sea conmutativo.

Conjugación. Si $\emptyset$ en el caso anterior puede elegirse de modo que sea un homeomorfismo, esto es, $\emptyset$ es bicontinua y biyectiva a la vez, entonces S y T son conjugados.

Conservación de la Propiedad P. Se dice que la propiedad P de un sistema dinámico se conserva por (semi) conjugación, si, dado el sistema dinámico $T: X \rightarrow X$ con la propiedad P cualquier otro sistema dinámico $S: Y \rightarrow Y$, (semi) conjugado de T también posee dicha propiedad.

Transitividad topológica. Un sistema dinámico $T: X \rightarrow X$ se dice topológicamente transitivo si, para cada par de abiertos no vacíos U y V de X , existe algún $n \geq 0$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Estas ideas las concluimos con la siguiente proposición:

Proposición 1.1.3. La transitividad topológica se conserva por semiconjugación.

Ahora introducimos algunas ideas sobre caos. La primera vez que se usó la palabra caos en matemática formalmente fue en el 1975 en el artículo "Period three implies Chaos" de L. Li y J. Yorke (ver F. Balibrea [4]), aunque el fenómeno estudiado allí no coincidía con la noción actual, ya que ellos plantearon que si T es continua en $\mathbb{R}$ y tiene un punto periódico de período 3, entonces T tiene puntos periódicos de todos los períodos y es caótica.

Más tarde se rectifica el concepto de caos ligado a ideas mucho más fuertes matemáticamente hablando.

Definición 1.1.4. Se asume aquí el concepto más ampliamente divulgado y aceptado sobrecaos, el introducido por Robert Devaney [14].

Un sistema dinámico $(X; T)$ se dice caótico en el sentido de Devaney si

- i) Es sensible respecto a las condiciones iniciales,
- ii) Es topológicamente transitivo, y
- iii) Sus puntos periódicos forman un conjunto denso en X .

Definición 1.1.5. Ahora bien, es importante tratar por separado estas tres características del conjunto X sobre el que se define la idea del caos.

- i) El sistema dinámico (X, T) se dice sensible respecto a las condiciones iniciales si existe un $\delta > 0$ (llamado constante de sensibilidad), tal que para todo $x \in X$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe $y \in X$ y un $N \in \mathbb{N}$, con $p(x, y) < \varepsilon$ tal que $p(T^{n(x)}, T^{n(y)}) > \delta$. Si esto se cumple, pequeños errores en la estimación de valores de la aplicación, expresan cambios radicales al iterar a T .
- ii) El sistema dinámico (X, T) se dice topológicamente transitivo si dados dos conjuntos abiertos U y V de X , existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Esto quiere decir que X no puede descomponerse en dos subconjuntos disjuntos invariantes con interior no vacío, lo que implica que si T posee una órbita densa, entonces (X, T) es topológicamente transitivo.
- iii) Finalmente, los puntos periódicos de (X, T) forman un conjunto denso en X , si para cualquier subconjunto abierto $U \subset X$, siempre existe un punto periódico de U . Por tanto, si un sistema dinámico es caótico, posee un componente de impredecibilidad, una componente de irreducibilidad y una componente de regularidad (la existencia de puntos periódicos densos).

En las dos últimas décadas se han probado algunos resultados que caracterizan el caos desde ópticas diferentes. Por ejemplo, en 1992 se probó que en cualquier espacio métrico, la sensibilidad a las condiciones iniciales se podía deducir de las otras dos propiedades, con lo que se estableció que un sistema dinámico (X, T) es caótico si es topológicamente transitivo y los puntos periódicos forman conjuntos densos en X . Así mismo, en 1994 se probó que todo sistema dinámico (X, T) definido en un intervalo $I = X$ por una función T topológicamente transitiva es caótico. Ya en el 1997 se prueba que el sistema dinámico $(X; T)$ es caótico si para cualquier par de conjuntos abiertos U y V en X , existe una órbita periódica que visita a ambos.

En el estudio general del caos el asunto ligado a las condiciones de suficiencia no ha sido resuelto del todo aun. En este trabajo se trata de aprovechar el relanzamiento que ha experimentado el concepto de hiperciclicidad en los últimos años, en relación con el desarrollo del caos en sistemas dinámicos discretos. Específicamente se visualiza la equivalencia que se da entre la transitividad de un operador continuo T y la existencia de puntos $x \in X$ con órbitas densas respecto a la iteración de T .

Existe una relación entre la transitividad y la existencia de puntos con órbitas densas que se demuestra más abajo. Es una consecuencia del teorema de Baire, el cual es muy importante en la teoría de espacios métricos completos y sintetiza la idea de que "un espacio métrico X completo, no puede representarse como la unión de un número numerable de conjuntos nunca densos".

Proposición 1.1.6 Sean X un espacio métrico de Baire separable y perfecto (i. e., sin puntos aislados) y $T: X \rightarrow X$ una aplicación continua. Entonces existe un $x \in X$ cuya órbita respecto a T es densa en X , si y sólo si, T es topológicamente transitiva.

Demostración. Supóngase que T admite una órbita densa, es decir, dado $z \in X$ tal que

$$\{T^n_z : n \in \mathbb{N}_0\}$$

Es denso en X . Sean U y G abiertos no vacíos de X , existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^k_z \in U$$

Como X no tiene puntos aislados

$$\{T^m_z : m > k\}$$

también es denso en X , por lo que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\{T^{k+n}_z = T^n(T^k)_z \in G\}$$

Luego, tomando $y := T^k_z \in U$, se tiene entonces que $T^n y \in G$ y por tanto

$$T^n(U) \cap V \neq \emptyset$$

Con lo que se establece que T es topológicamente transitiva.

Recíprocamente, como X es un espacio métrico separable satisface el segundo axioma de numerabilidad. Se elige entonces $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como base de abiertos para la topología de X . Para todo $n \in \mathbb{N}$ se define

$$G_n := \{x \in X : \exists m \in \mathbb{N} \in T^m x \in V_n\}$$

O equivalentemente

$$G_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} (T^m)^{-1}(V_n)$$

Se observa que para todo $n \in \mathbb{N}$, G_n es abierto en X . Queda por mostrar que cada G_n es denso en X .

Sean $n \in \mathbb{N}$ y un abierto U de X fijos. Como T es transitiva existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^m U \cap V_n \neq \emptyset$$

es decir, existe $x \in U$ tal que $T^m x \in V_n$, por lo que $x \in U \cap G_n$. Pero, por ser X un espacio de Baire se tiene que $G_n := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$ es denso en X . Obsérvese ahora que cada punto perteneciente a G tiene órbita densa en X respecto a T . Sean, $z \in G$ y U un abierto cualquiera de X . Por la elección de la base $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $V_{n_0} \subset U$. Por otro lado, como $z \in G \subset G_n$ se tiene que existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^m_z \in V_{n_0} \subset U$$

y por tanto el conjunto $\text{Orb}(T, z)$ es denso en X .

Como se podrá ver en el contexto de este trabajo la idea más importante en referencia al caos es precisamente la relación planteada en esta proposición. También es fácil ver que el caos de Devaney se conserva por semiconjugación. Más adelante, en el tratamiento del concepto central del estudio, hiperciclicidad, retomaremos esta relación con la revisión del lema de Shapiro y de otras cuestiones útiles para el mismo.

Existen otras nociones más fuertes de transitividad, donde $T^n(U)$ corta a V no solo para algún n sino para todo $n \in \mathbb{N}_0$ suficientemente grande. Estas propiedades son llamadas mezclan-

te y débil mezclante. A continuación se presentan estos conceptos a los que se hará referencia más adelante.

Definición 1.1.7 Un operador continuo $T: X \rightarrow X$, se dice topológicamente mezclante si, para todo $U, V \subset X$, abiertos no vacíos, existe $N > 0$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$, para toda $n \geq N$.

Definición 1.1.8 Un operador continuo $T: X \rightarrow X$ se dice topológicamente débil mezclante si, $T \oplus T$ es transitiva en $X \oplus X$, es decir, si para todo $U_1; U_2; V_1; V_2 \subset X$, abiertos no vacíos, existe $n > 0$, tal que $T^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$; y $T^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$.

Es inmediato observar que mezclante implica débil mezclante y débil mezclante a su vez implica hiperciclicidad. Finalmente, se puede demostrar que tanto la propiedad de mezclante como la de débil mezclante se conservan por semiconjugación.

1.2 Dinámica lineal

En esta sección nos vamos a centrar en el caso en que la aplicación T es lineal y continua y X es un espacio de Banach. En este contexto la existencia de una órbita densa se conoce como hiperciclicidad.

La hiperciclicidad comienza con los trabajos de Birkhoff cuando probó la existencia de una función $f(z)$ cuyo conjunto de trasladas $\{ (z + a): a \in \mathbb{C} \}$ es denso en el espacio de las funciones enteras $H(\mathbb{C})$. Con los trabajos de Maclane en 1952 que construyó una función entera en la que una sucesión de derivadas aproxima uniformemente en compactos de $\mathbb{C}$ a cualquier Dinámica de operadores desplazamiento en espacios de sucesiones de Banach otra función, resultado equivalente a decir que el operador derivada $D: H(\mathbb{C}) \rightarrow H(\mathbb{C})$ es hiperciclicidad. Estos dos clásicos resultados se consideran el punto de partida de la línea de investigación

dentro del análisis matemático que se ha denominado Hiperciclicidad y que en estos tiempos ha adquirido identidad propia como tema del análisis funcional.

En el 1969, S. Rolewicz abordó el problema de la existencia de los operadores hipercíclicos en los espacios l^p , sin usar aun las notaciones y nomenclaturas actuales, dejando planteado el problema de la existencia de los operadores hipercíclicos en cualquier espacio de Banach. También probó que si B es el operador backward shift en l^p , donde $B(a_1; a_2; a_3; \dots) = (a_2; a_3; \dots)$, entonces λB es hipercíclico para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, con $|\lambda| > 1$.

En la década de los 80's (en 1982 C. Kitai [20], y en 1987 R. M. Gethner y J. H. Shapiro [18] introducen la condición suficiente de hiperciclicidad, hoy conocida como Criterio de hiperciclicidad, la cual permite deducir casi automáticamente los resultados referidos de las pruebas de Birkhoff, Maclane y Rolewicz. Este criterio fue mejorado más tarde por los aportes de J. P. Bés [6], cuando impone condiciones más débiles a la hiperciclicidad. Posteriormente L. Bernal [05] e I. S. Ansari [02] probaron que todo espacio de Banach separable de dimensión infinita admite operador hipercíclico. Se basaron para la prueba en un resultado fundamental de Salas [29]. Así mismo, Bonnet y Peris [09] probaron este resultado para espacios de Fréchet separables.

1.2.1 Concepto de hiperciclicidad

Como se ha dicho, si X es un espacio de Banach $T: X \rightarrow X$ una aplicación lineal y continua, para este trabajo juega un papel muy importante el análisis del comportamiento del conjunto que se obtiene al iterar a T con respecto a $x \in X$.

Definición 1.2.1 Sea X un espacio de Banach y $T: X \rightarrow X$ una aplicación lineal y continua. Para cada $x \in X$, al conjunto $\{x, T(x); T^2(x), T^3(x), \dots\}$ se le llama *órbita* de x generada por T y se representa por $\text{orb}(T; x)$. En este caso se dice que un $x \in X$ es *hipercíclico* respecto a T , si el conjunto $\text{orb}(T, x)$ es denso en X . Al operador T que satisface esta condición se le llama *operador hipercíclico* y al vector x , *vector hipercíclico*.

La importancia del estudio y desarrollo del concepto de hiperciclicidad en estas últimas décadas se puede explicar en el hecho de que el mismo ha permitido “unificar, extender y complementar diversos resultados de la teoría de funciones clásicas y la teoría de operadores -ver a Aparicio [3]-. Con el estudio de los operadores hipercíclicos se puede conocer cuando el operador admite o no un conjunto cerrado invariante no trivial. Según este autor el concepto surgió al tratar de resolver el problema de subconjuntos cerrados invariantes bajo un cierto operador. En este sentido se pueden hacer dos observaciones:

i) El conjunto cerrado más pequeño que contiene a $x \in X$ y es invariante bajo T es la clausura de $\text{Orb}(T, x)$;

ii) Dado $T \neq 0$, T tiene un conjunto cerrado invariante no trivial, si y sólo si, existe $x \neq 0$ en X , tal que el conjunto $\text{Orb}(T, x)$ no es denso en X .

1.2.2 Criterio de hiperciclicidad

Lo que se conoce como criterio de hiperciclicidad ha sido establecido por diferentes autores, en un período relativamente corto de tiempo. Los aportes más notables sobre este concepto son los realizados por Ca-

rol Kitai, Gethner-Shapiro, Godefroy-Shapiro, J. P. Bés y otros. A continuación vamos a tratar algunos de ellos bajo los cuales un operador es hipercíclico, mezclante o débil mezclante.

Teorema 1.2.2 (Criterio de Kitai). Sea X un espacio métrico separable y $T: X \rightarrow X$ un operador lineal y acotado. Si existen Y, Z subconjuntos densos de X y una aplicación $S: Z \rightarrow Z$ tales que

- i) $T^n x \rightarrow 0$ para cada $x \in Y$,
- ii) $S^n y \rightarrow 0$ para cada $y \in Z$, y
- iii) $TSy = y$ para cada $y \in Z$, entonces T es mezclante.

Casi simultáneamente con Kitai, Gethner y Shapiro plantean un criterio similar al de ésta.

Teorema 1.2.3 Criterio de hiperciclicidad segun Gethner-Shapiro.

Sea X un espacio de Banach separable y $T: X \rightarrow X$ un operador lineal y acotado. Si existen $Y, Z \subset X$ densos en él, una sucesión creciente de naturales $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ y una aplicación $S: Z \rightarrow Z$ (posiblemente discontinua y no lineal), tales que

- i) $T^{m_k} \rightarrow 0$ puntualmente en Y , cuando $k \rightarrow \infty$,
- ii) $S^{m_k} \rightarrow 0$ puntualmente en Z , cuando $k \rightarrow \infty$,
- iii) $ToS = Id_Z$,

Entonces el operador T es hipercíclico.

Demostración. Si se toma en cuenta que si la sucesión $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de la topología de X , entonces para cada $n, m \in \mathbb{N}$ se fijan $x \in Y \cap V_m$ e $y \in Z \cap V_n$. Por (i), (ii) y (iii), existe $k \in \mathbb{N}$ tal que, tomando un $r := x + S_{m_y} \in V_m$, se tiene que

$$T^{mk}r = (T^{mk}x + T^{mk}S_{mk}y) \in V_n.$$

Es decir $\mathcal{E}$

$$r \in \{V_m \cap (T^{mk})^{-1}(V_n)\}$$

Luego

$$G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (T^n)^{-1} V_n$$

es un abierto denso en X . El resultado se obtiene al aplicar el teorema de la universalidad en

$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (T^n)^{-1} V_n \right\},$$

Permite ver que cada elemento de G es hipercíclico y por tanto T es hipercíclico.

Luego, Godefroy y Shapiro [18] generalizan este criterio haciendo ver que en lugar de iterar una única función $S: Y \rightarrow Y$ es suficiente disponer de una sucesión de aplicaciones $\{S_{m_k}\}$ que sean inversas por la derecha de $\{T^{m_k}\}$ y que también converjan puntualmente a cero en Y . De esta observación se establece la siguiente versión del criterio.

Teorema 1.2.4 Criterio de hiperciclicidad Godefroy-Shapiro Sea X un espacio de Banach separable y $T: X \rightarrow X$ un operador lineal y acotado. Si existen X_0 ; $Y \subset X$ densos en X , una sucesión creciente de naturales $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ y aplicaciones $S_{m_k}: Y \rightarrow X$, $k \in \mathbb{N}$

(Posiblemente discontinuas y no lineales), tales que

i) $T^{m_k} \rightarrow 0$ puntualmente en X_0 , cuando $k \rightarrow \infty$,

ii) $Sm_k \rightarrow 0$ puntualmente en Y , cuando $k \rightarrow \infty$,

iii) $T^{mk} \circ Sm_k = Id_Y$, $k \in \mathbb{N}$

Entonces el operador T es hipercíclico.

Juan P. Bés [06] debilita la condición (iii) y presenta una versión más débil del criterio cuando establece el teorema siguiente:

Teorema 1.2.5 *Criterio de hiperciclicidad según Bés.* Sea X un espacio de Banach separable y $T: X \rightarrow X$ un operador lineal y acotado. Si existen Z e Y subconjuntos densos de X , una sucesión creciente de naturales $k=1$ y aplicaciones $Sm_k: Y \rightarrow X$; $k \in \mathbb{N}$ (no necesariamente lineales ni continuas), tales que

i) $(T^{mk} \circ Sm_k)y \rightarrow y$, $\forall y \in Y$, cuando $k \rightarrow \infty$,

ii) $Sm_k \rightarrow 0$ $\forall y \in Y$, cuando $k \rightarrow \infty$,

iii) $T^{mk}_x \rightarrow 0$, $\forall x \in Z$, cuando $k \rightarrow \infty$

Entonces el operador T es hipercíclico.

Demostración. Veamos que T es transitivo. Por densidad de Z e Y en X , basta probar que, dados U y V dos 0-entornos absolutamente convexos en X . Con $x \in Z$, $y \in Y$ existe un natural m tal que

$$T^m(x + U) \cap (y + V) \neq \emptyset$$

Por (i), (ii) y (iii) existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$(T^m \circ Sm_m)y \in y + \frac{1}{2}V$$

y también

$$Sm_my \in U \wedge T^mx \in \frac{1}{2}V$$

Entonces

$$T^m(x + Sm_my) = T^mx + T^mSm_my \in \frac{1}{2}V + y + \frac{1}{2}V \subset y + V$$

Luego,

$$T^m(x + U) \cap (y + V) \neq \emptyset$$

Como T es operador transitivo, por la proposición de la existencia de la órbita densa, z es un vector con órbita densa en X y T es hipercíclico.

Observación: Un operador T en un espacio de Banach X , satisface el criterio de hiperciclicidad respecto de $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ en el sentido de Godefroy-Shapiro (respectivamente de Bés), si T satisface las hipótesis del teorema 2.2.4 (respectivamente al teorema 2.2.5). Así, es fácil observar que si T satisface el criterio de hiperciclicidad respecto de $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{m_k\}_{s=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, entonces T satisface el criterio de hiperciclicidad respecto de $\{m_k\}_{s=1}^{\infty}$.

La hiperciclicidad y el caos también se estudian relacionados con auto valores y sus correspondientes autos vectores. Una forma sencilla de ver esta relación es a través de las siguientes proposiciones:

Proposición 1.2.6 Sea $T: X \rightarrow X$ un operador lineal y continuo en un espacio de Banach X . Si

$$X_0 := \text{LIN} \{x \in X \mid Tx = \lambda x; \text{ para cada } \lambda; |\lambda| < 1\}$$

y

$$Y := \text{LIN} \{x \in X \mid Tx = \lambda x; \text{ para cada } \lambda; |\lambda| < 1\}$$

son densos en X , entonces T satisface el criterio de hiperciclicidad y por tanto es hipercíclico (Bernal-González [05]).

Respecto al conjunto de los puntos periódicos del espacio X , se plantea la siguiente proposición:

Proposición 1.2.7. Sea $T: X \rightarrow X$, un operador lineal y continuo en un espacio de Banach X . Se cumple que

$$\text{Per}(T) = \text{LIN} \{x \in X \mid \exists n \in \mathbb{N}, \exists \lambda \in \mathbb{C}, \lambda^n = 1 \text{ } \exists Tx = \lambda x\}$$

Demostración

El conjunto $\text{Per}(T)$ es evidentemente un espacio vectorial debido a que T es lineal.

Si $Tx = \lambda x$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $\lambda^n = 1$, entonces es fácil observar que

$$T^n x = x$$

Ya que

$$(Tx = \lambda x, T^2x = \lambda^2 x; T^3x = \lambda^3 x, \dots T^n x = \lambda^n x)$$

Y por tanto x es periódico.

Recíprocamente, supongamos que x es periódico, esto es, $T^n x = x$ para algún n . Consideremos la descomposición polinómica de $z^n - 1$ como

$$z^n - 1 = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \dots (z - \lambda_n)$$

con las raíces λ_i , $i = 1; 2, \dots, n$ y basados en simples propiedades del álgebra lineal sobre el sistema

$$\{P_1(z), P_2(z), \dots, P_n(z)\}$$

Donde

$$P_i(z) := \prod_{i \neq j} (z - \lambda_j)$$

es una base del espacio de polinomios de grado estrictamente menor que n . En particular, para $x_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \dots, n$ tal que

$$1 = \sum_{i=1}^n x_i p_i(z)$$

Sustituimos z por T , esto es,

$$1 = \sum_{i=1}^n x_i p_i(T)$$

Ahora definimos

$$Y_i := p_i(T) x$$

Tenemos que

$$(T - \lambda_i) Y_i = (T^n - I) x = 0$$

por lo que se obtiene

$$x = \sum_{i=1}^n X_i Y_i$$

y se llega entonces a $T^n x = x$, con lo que se prueba la inclusión.

El resultado anterior nos permite obtener el caos de un operador en términos de la existencia de “suficientes” autovectores.

Proposición 1.2.8 Sea $T: X \rightarrow X$, un operador lineal y continuo en un espacio de Banach X . Si los espacios

$$X_0 := \text{LIN} \{ x \in X / Tx = \lambda x, |\lambda| < 1 \},$$

$$Y := \text{LIN} \{ y \in X / Ty = \lambda y, |\lambda| > 1 \},$$

$$Z := \text{LIN} \{ z \in X / Tz = \lambda z, |\lambda| = 1 \wedge \lambda^n = 1 \},$$

Son densos en X , entonces T es caótico.

1.3. Espacios de sucesiones de Banach.

Ahora se presenta de manera breve una descripción de los espacios de sucesiones de Banach y de manera especial los conocidos como ℓ^p y los $\ell^p(v)$.

1.3.1 Espacios ℓ^p

Definición 1.3.1. Consideremos para $1 \leq p < +\infty$ el espacio ℓ^p definido como

$$l^p := \{(x_i)_i \in K^{\mathbb{N}} : \|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} < \infty\}$$

Es fácil probar que el espacio l^p es un espacio de Banach si se parte del lema que establece que "si X es un espacio normado y la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ es de Cauchy, entonces ella está acotada en X ". Dicha prueba puede hacerse a través de la siguiente proposición.

Proposición 1.3.2. Para $1 \leq p < +\infty$ el espacio L^p es un espacio de Banach (ver Fabian [17]).

Demostración. * Sea $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en el espacio l^p , donde $x^k := (x_i^k)_i$. Dado un $\varepsilon > 0$, encontrar un k_0 tal que $\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^k - x_i^l|^p \right)^{1/p}$, siempre que $k, l \geq k_0$.

En particular, $\|x^k - x^l\| \leq \varepsilon$ siempre que $k, l \geq k_0$ e $i \in \mathbb{N}$; de aquí que la sucesión $\{x_i^k\}_{k=1}^{\infty}$ converge a algún x_i siempre que $i \in \mathbb{N}$.

* Tomando $x = x_l$, nos interesa mostrar que $x \in L^p$. Según el lema usado como punto de partida, existe una constante $c > 0$ tal que

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^k|^p \right)^{1/p} \leq C$$

Para algún k . Por tanto

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i^k|^p \right)^{1/p} \leq C, \forall n, k \in \mathbb{N}$$

Ahora, si se permite que $k \rightarrow \infty$ se obtiene

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \leq C$$

Siempre que $n \in \mathbb{N}$. Por tanto

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{k_i}|^p \right)^{1/p} \leq C,$$

Y entonces $x \in l^p$.

* Por otro lado, hay que mostrar que $x^k \rightarrow x$ en L^p . Dado que $\varepsilon > 0$, permitiendo que $1 \rightarrow \infty$ en el lema citado previo a la prueba, observando que

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i^{k_i}|^p \right)^{1/p} \leq \varepsilon$$

Siempre que $n \geq N$ y que $k \geq k_0$. Finalmente, se observa que $n \rightarrow \infty$ y se obtiene

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{k_i}|^p \right)^{1/p} = \|x_k - x\|_p \leq \varepsilon$$

Siempre que $k \geq k_0$. De este resultado se saca que $x^k \rightarrow x$ en el espacio l^p y por tanto L^p es un espacio de Banach.

1.3.2 Espacios $l^p(v)$

Consideremos ahora el espacio l^p ponderado por una sucesión.

Definición 1.3.3 Dada una sucesión de pesos estrictamente positiva $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, para $1 \leq p < \infty$ se considera el espacio $l^p(v)$ como

$$l^p(v) := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \|x\| := \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p v_i \right)^{1/p} < \infty\}$$

Una importante relación entre los espacios l^p y $l^p(v)$ es la existencia de una isometría entre ellos, la cual se muestra a través de la proposición:

Proposición 1.3.4 Los espacios l^p y $l^p(v)$ son isométricos.

Demostración. Consideremos la isometría

$$\emptyset: l^p(v) \rightarrow l^p$$

Con

$$(x_i)_i \rightarrow (x_i v_i)$$

Claramente $\emptyset$ es lineal y además

$$\|x\|_{l^p(v)} = \left(\sum \| \emptyset(x) \|^p \right)^{1/p}$$

por lo que $\emptyset$ es una isometría de $l^p(v)$ a l^p .

Un operador muy importante en relación a los $l^p(v)$ es el operador desplazamiento.

Definición 1.3.5 El operador desplazamiento $B: l^p(v) \rightarrow l^p(v)$ está dado por $B(x_1, x_2, x_3, \dots) \rightarrow (x_2, x_3, \dots)$, donde $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ y $(x_2, x_3, \dots)$ están en $(v_n)_n$.

Ahora es importante obtener la condición para que B sea acotado. Esto se logra demostrando la proposición que aparece a continuación.

$$j=1,2,\dots$$

Proposición 1.3.6. El operador B es acotado en $l^p(v)$ ($1 \leq p < \infty$) si y sólo si se cumple que

$$\sup_i \frac{v_i}{v_i+1} < \infty$$

Demostración. Si B es acotado entonces

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0: \|Bx\| \leq \delta \|x\|.$$

Si tomamos en particular $x = e_j$, con $j = 1, 2, \dots$ obtenemos

$$\|e_j\| \leq \varepsilon \|e_j + 1\|,$$

Luego

$$v_j \leq \varepsilon v_{j+1}, j = 1, 2, \dots$$

de donde

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \frac{v_j}{v_{j+1}} < \infty$$

Recíprocamente, si

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \frac{v_j}{v_{j+1}} < \infty$$

entonces

$$\exists \varepsilon > 0 : v_j \leq \varepsilon v_{j+1}, j = 1, 2, \dots$$

Dado $x \in \ell^p(v)$ se tiene que

$$\|B_x\|^p = \sum_{j=1}^{\infty} |x_{j+1}|^p v_j$$

$$\leq \varepsilon^p \sum_{j=1}^{\infty} |x_{j+1}|^p v_{j+1}$$

$$\leq \varepsilon^p \|x\|^p$$

1.4. Operadores hipercíclicos y caóticos

1.4.1 El Operador derivada (McLane)

Este operador fue introducido por G. R. McLane en el 1952 y es parte de los primeros grupos de estudio de la hiperciclicidad. para su presentación sea $H(C)$ el espacio de las funciones enteras en C con la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos de C . En este espacio se considera el operador derivada $D: H(C) \rightarrow H(C)$ y se puede mostrar fácilmente que D es hipercíclico.

Como los polinomios son densos en $H(C)$, sea

$$X_0 := \text{LIN}\{z^i, i \leq 0\}$$

Es fácil ver que $D^n x \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$, para todo $x \in X_0$.

Definamos la aplicación S como

$$S z^i := \frac{z^{i+1}}{i+1}, i \geq 0$$

y extendamos por linealidad S a X_0 . Es fácil ver que

$$D \circ S x = x \quad \forall x \in X_0$$

Por otra parte, sea K un compacto de C ; existe $R > 0$ tal que $|z| \leq R$ para todo $z \in K$. Por tanto, para cada $i \geq 0$ y para todo $z \in K$ se cumple que, cuando $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} |S^n z^i| &= \frac{|z|^{i+n}}{(i+1)(i+2)\dots(i+n)} \\ &\leq \frac{R^{i+n}}{(i+1)(i+2)\dots(i+n)} \leq \frac{R^n}{(n+1)^i} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Por lo que se concluye con que $S_n x \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, para todo $x \in X_0$ y entonces, por el criterio de hiperciclicidad D es hipercíclico

1.4.2. El Operador backward shift (Rolewicz).

Este operador fue introducido y estudiado por S Rolewicz, a partir del 1969. Es el primer operador hipercíclico conocido en espacios de Hilbert.

Inicialmente su presentación se hizo en espacios de sucesiones ℓ^2 . Se introduce el operador

desplazamiento B como

$$B(a_1; a_2; a_3, \dots) = (a_2; a_3, \dots)$$

Entonces se introduce $T := \lambda B$ como operador hipercíclico para $|\lambda| > 1$.

Para probar que $T := \lambda B$ es hipercíclico tomemos

$$e_i := (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \text{ y } X_0 := \text{LIN}\{e_i, i \geq 1\}$$

Se sabe que X_0 es denso en ℓ^2 y como para cada i fijo $T^n e_i$ es eventualmente cero, se tiene que para $n \rightarrow \infty$

$$T^n x \rightarrow 0, \forall x \in X_0$$

Definamos ahora la aplicación μ como

$$\mu(e_i) = e_{i+1}$$

y extendámosla por linealidad a todo X_0 . Sea $S: X_0 \rightarrow X_0$ definida como $S := \lambda^{-1} \mu$ Se

Comprueba que

$$(T \circ S)x = x, \forall x \in X_0$$

Por otra parte

$$\|S^n\| = |\lambda|^{-n} \|\mu\| = |\lambda|^{-n}$$

por lo que cuando $n \rightarrow \infty$, $S^n x \rightarrow 0$, para todo $x \in X_0$

X_0 . Según este resultado y el criterio de hiperciclicidad $T = \lambda B$ es hipercíclico,

Nota: Como se puede observar, el operador B no puede ser hipercíclico por sí solo ya que

$$\|B\| = 1.$$

Continúa en el próximo número.